直接法による
ソリトンの数理

広 田 良 吾 著

岩 波 書 店

まえがき

ソリトンは孤立波の一種で，ソリトン同士が衝突しても壊れないパルス波である．コンピュータによる数値シミュレーションの結果はこのことを示唆している．しかし，衝突してもほんとうに元の状態に回復するのだろうか？　コンピュータの計算結果を詳細に分析してみると，ほんの少しではあるが衝突によってさざ波が発生し，元の状態に回復していないようである．ソリトンが衝突したとき壊れるか壊れないかを厳密に証明するためには，ソリトン方程式の厳密解を求める必要がある．

一般に非線形偏微分方程式(ソリトン方程式は非線形である)の厳密解を求めるのは非常に難しい．しかもある方法で，ある方程式の厳密解が求まっても，その方法を別の方程式に適用することはできないのが普通である．数学的知識の少ない者でも簡単に，いろいろな非線形偏微分方程式を統一的に解く方法はないものか？　この目的のために研究されたのが直接法である．

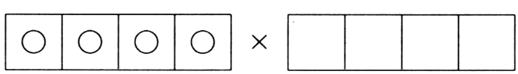
第1章ではまず物理的・直観的に，孤立波ができるための条件について議論し，非線形の孤立波は線形の波の単なる寄せ集めでは構成できないことを示す．このことから非線形波動方程式を摂動計算で解く手法が得られ，直接法の基本的アイデア「解を有理関数 G/F で表示し，F と G に対する方程式(双線形方程式)を解く」に導く．その過程から，新しい2項演算子 D–operator が導入さ

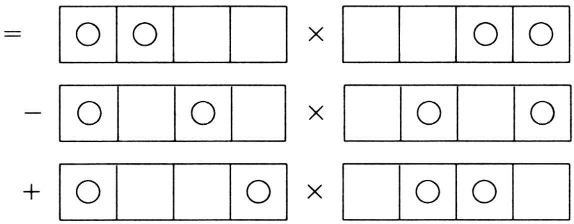
れ，非線形偏微分方程式を双線形形式（一般には同次式）に変換するための一般公式が提示される．この双線形形式の解を通常の摂動計算法で求めると D-operator の特別な性質によって，摂動展開が有限の項で切れる場合がある．このとき摂動計算の結果は厳密解を与えることになる．ソリトンを記述する代表的な方程式である KdV 方程式を例にとって解を求め，ソリトンは衝突によって壊れないことを証明する．

第 2 章では，第 3 章で使う数学，特に行列式とパフィアン（Pfaffian）についての理論を述べる．まったく予備知識のない読者にも理解できるように，例題をあげてていねいに解説したので，この本の総ページ数の 1/4 も費やしている．

第 3 章では直接法の立場に立って，ソリトン方程式の構造について述べる．現在までに種々多様なソリトン方程式が発見されている（方程式を具体的に書くだけで数ページになる）が，個々の方程式ではなく，「ソリトン方程式全体に共通した本質的構造は何か？」との疑問が生じる．これに答えるのが第 3 章である．結論を先に述べると「ソリトン方程式（双線形形式）とはパフィアンの恒等式」である．この観点に立って，ソリトン方程式の中で最も基本的である KP 方程式，BKP 方程式，結合型 KP 方程式，戸田格子方程式，戸田分子方程式等がどのようにしてパフィアンの恒等式に帰着されるかを示す．

パフィアンという耳慣れない言葉が出てきたが，パフィアンは行列式と深い関係があり，通常では「パフィアンの 2 乗は反対称行列式」であるという性質によって紹介されている．このため行列式の特殊なものがパフィアンであると誤解されているようであるが，事実は逆であって，パフィアンは行列式の一般化と見る方が自然である．例えば，行列式に対して成り立つ恒等式「プリュッカーの関係式」や「ヤコビの等式」はパフィアンでも成立し，両者は拡張されて「パフィアンの恒等式」に統一されるのである．パフィアンの恒等式は Sato（佐藤幹夫先生）のマヤ図形を使って表現すると，例えば次のようになる．





ソリトン方程式の本質がこの簡単な図形にあるとは！

第4章ではソリトン理論の発展に重要な寄与をしているバックルンド変換(Bäcklund transformation)について述べる．双線形形式におけるバックルンド変換は，(i)逆散乱法におけるラックス対(Lax pair)，(ii)新しいソリトン方程式，(iii)ミウラ変換を生成する．双線形形式におけるバックルンド変換とは，一言でいえば演算子 D-operator の「交換公式」のことである．最初にこの交換公式を使って，KdV 方程式のバックルンド変換式を求める．次に KdV 型方程式のバックルンド変換式の例を列記する．最後に KP 方程式，BKP 方程式，戸田方程式などのバックルンド変換式の構造を示し，これらのバックルンド変換式がすべて「パフィアンの恒等式」に帰着することを示す．

この本では直接法の基礎的ことがらの解説が主で，多方面にわたる発展・応用については紙数の都合で割愛せざるをえなかった．特に Sato school (佐藤幹夫，佐藤泰子，柏原正樹，三輪哲二，神保道夫，伊達悦朗の諸氏)による双線形形式の群論的取扱いにまったく触れられなかったのは残念である．また逆散乱法については数多くのテキストが出版されているので，この本では完全に省略している．筆者はひたすら「ソリトン方程式を奥の奥で支配している数理の美しさと簡明さ」を読者に分かりやすく伝えたいとの気持ちだけでこの本を著した．

直接法は京都大学の佐藤幹夫教授や東京大学の薩摩順吉教授らの研究グループの諸氏に負うところが大であり，この機会を借りて深く感謝の意を表したい．この本の第1章を書くに際して筆者の講義(於京都大学理学部物理教室，昭和54年2月1日〜3日)を記録した木立英行氏のノートが非常に役に立ったこと

を付記して木立氏に感謝の意を表したい．最後になったが，図の作成と校正に協力してくれた早稲田大学理工学研究科の辻本諭と今井達也の両君に感謝する．

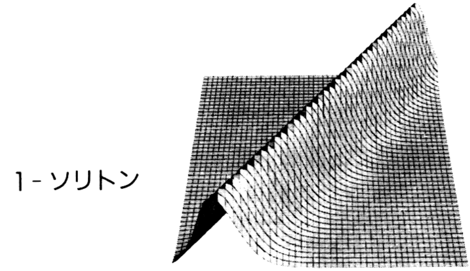
1992年8月

広　田　良　吾

目次

1

ソリトン方程式の双線形化



1-0　孤立波とソリトン

波といえば図 1-1 のような連成波を思い浮かべるが，遠浅の海岸でサーフィンを楽しむときには，**孤立波**(solitary wave) (図 1-2) を利用する．**ソリトン**(soliton) は孤立波の一種で，衝突によって壊れない波である．まず孤立波を記述する波動方程式の性質を調べよう．

ソリトン解をもつ波動方程式は，非線形性と分散性を合わせもっている．波動方程式の解法を学ぶまえに，この非線形性と分散性が波の振舞いに与える影響を調べ，どのような条件の下で孤立波が存在しうるかを直観的・物理的に理

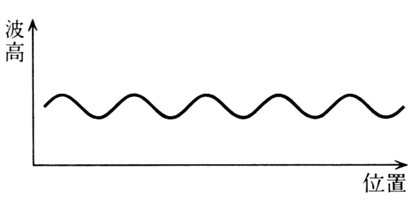


図 1-1　連成波



図 1-2　孤立波

解しよう.

1-1　非線形性と分散性

a)　線形で非分散性の波

このもっとも単純な形の波動の典型は，音波や電磁波である．それは次の方程式で記述される．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-{v_0}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x,t)=0 \tag{1.1}$$

ここで v_0 は定数で，波の速度を表わしている．この方程式は形式的に

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-v_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_0\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x,t)=0$$

と分解されるので，さらに簡単な方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_0\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x,t)=0 \tag{1.2}$$

を考えることにしよう．この方程式の解は，分解される前の方程式(1.1)の解である．方程式(1.1)の左と右とに進行する波動解のうち，右方に進む解，

$$f(x,t)=f(x-v_0t)$$

を与える．この波を周期的な波とすると，もっとも基本的な解として平面波

$$f(x,t)=\exp\left[i(\omega t-kx)\right]$$

があり，角振動数 ω と波数 k の関係，**分散関係**(dispersion relation)は $\omega=v_0k$ となり，線形である．ここで v_0 は波の位相速度である．

線形な分散関係(linear dispersion relation)をもつ波動を**非分散性波**(non-dispersive wave)とよぶが，この種の波の特徴は，さまざまな波数 k の平面波を重ね合わせて合成された初期のパルス波形がいつまでもその形を変えないことである．重ね合わされた成分の 1 つ 1 つが，みな同じ速さで進むからである．この波形を保つという性質をそなえた波は，通信手段として応用上きわめて重要である．ソリトンは非分散性の波ではないが，波形が変わらないという性質

をもっており，この点からみても応用的価値ももっているといえる．

次に，線形ではあるが分散性をもつ波動方程式を考えてみよう．

b)　線形で分散性の波

最も簡単な方程式として，次の式を考える．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_0\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f(x,t) = 0 \tag{1.3}$$

解として平面波

$$f(x,t) \propto \exp\,[i(\omega t-kx)]$$

を仮定すると，分散関係は

$$\omega = v_0 k-\delta k^3$$

となり，k について非線形である．したがってこの波の位相速度は a)項の場合と異なり，

$$\frac{\omega}{k} = v_0-\delta k^2$$

である．波数 k によって位相速度が違っている．一方，群速度は

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = v_0-3\delta k^2$$

である．どちらの速度も v_0 より小さい($\delta>0$ のとき)ことを注意しておく．初期のパルス波形を構成する平面波の速度が k によって違うことから，パルス波は進行するにつれてその形が崩れてしまう．線形で分散性の波は安定なパルス波形を保てないのである．

いままでの 2 例は，どちらも線形の微分方程式であった．次に非線形性の影響を考えてみることにしよう．

c)　非線形で非分散性の波

最も簡単な方程式として，次の非分散性の波動方程式を考える．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v(f)\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x,t) = 0$$
$$v(f) = v_0+\alpha f^m \tag{1.4}$$

これは速度 v が波の振幅 f に依存するような非線形波動方程式である．

この方程式は，形式的な解

$$f(x,t) = f(x-v(f)t)$$

をもつ．v が f の増加関数のとき，この式は，振幅の大きい部分が，小さい部分より速く進むことを物語っている．したがって，図 1-3 のように，波の突っ立ちがおこり，やがて波は崩壊してしまう．しかし物理的に波の突っ立ちと崩壊が起こる前に，波の傾斜が $|\partial f/\partial x| \gg 1$ となるので，そもそもこの方程式は意味をもたず，次の微分方程式(1.5)に取って代わられるべきものである．

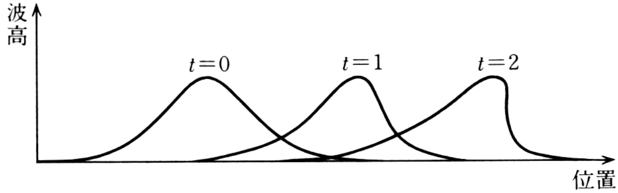


図 1-3　波の突っ立ち．$t=0$ で左右対称な孤立波は，波高によって波の速度が違うため，その後 ($t=1, 2, \cdots$) 波の突っ立ちが生じ，やがて崩れてしまう．

d)　非線形で分散性の波

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_0\frac{\partial}{\partial x}+\alpha f^m\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f(x,t) = 0 \tag{1.5}$$

この方程式には，形を変えずに進行するパルス波すなわち孤立波解がある．数学的に解を求めるまえに，どうして孤立波が存在し得るのか，その物理的な理由を調べてみよう．われわれは b) 項で線形で分散性の波には孤立波が存在しないことを知っている．そして c) 項で非線形で非分散性の波にも孤立波は存在しないことを知った．どうして非線形で分散性の波の方程式に孤立波解が存在しうるのだろうか？

図 1-4 に示すような孤立波が存在すると仮定して，このパルス波が形を変えずに進行しうるかどうかを調べてみる．そのためには，少なくともパルス波形の頂点付近の波の速度 v と，すそ野での速度 v とが一致する必要がある．このことを正確に調べるために，座標 $\eta \equiv px-\Omega t = p(x-vt)$，$v \equiv \Omega/p$ を導入する．

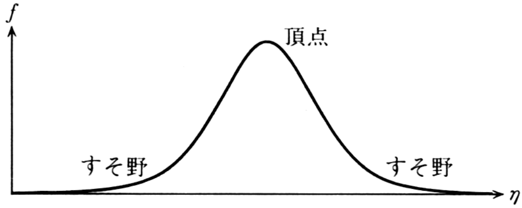


図 1-4　孤立波を，頂点とすそ野に分けて考える．

ここで p は自由なパラメータであり，p が大きいとき，パルス波は急峻になる．この座標 η は一定速度 v で進行している波を記述するのに便利な座標である．$t=0$ で η は位置座標 x に比例している $(\eta=px)$．t が 0 でないとき，η は速度 v で動く座標 $x-vt$ に比例している $(\eta=p(x-vt))$．パルス波の波高 f が $\eta=0$ で最大値 A になるとき，頂点近くでの波高 f は η の 2 次式で近似できるので，

$$f \sim A(1-\mathrm{const.}\times\eta^2)$$

となる．この式から $\partial^3 f/\partial x^3 \sim 0$ である．したがって頂点近くでの f は，次の微分方程式を満たす．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+[v_0+\alpha f(x,t)^m]\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x,t) \sim 0$$

この式は式(1.4)と同じであるので，c)項で調べたように頂点での速度 $v(f)$ は，最大振幅が A であるので，

$$v(f) = v_0+\alpha A^m \tag{1.6}$$

であり，$\alpha>0$ のとき確かに v_0 よりも大きい．

一方，すそ野では f の値が小さいので非線形項が省略できて，f は次の線形微分方程式を満たす．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_0\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f(x,t) \sim 0 \tag{1.7}$$

b)項で調べたように，すそ野の部分の速度(群速度 v_{gr}，位相速度 v_{pf})は

$$v_{\rm gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = v_0 - 3\delta k^2$$
$$v_{\rm pf} = \frac{\omega}{k} = v_0 - \delta k^2 \qquad (1.8)$$

となるから，位相速度，群速度ともに，$\delta>0$ のとき v_0 より小さくなる．したがって，孤立波の速度は頂点付近のほうが，すそ野での速度より大きくなり，波形が崩れるので孤立波は存在しないように思われる．これは事実に反している．どうしてだろうか？

じつは，すそ野の部分の速度の計算が間違っているのである．すそ野の部分では振幅が小さいので，方程式は線形微分方程式となる．そのため線形波動の常識にしたがって，解を平面波で近似し，波の速度を線形の波の速度，位相速度または群速度に等しいと考えたのが間違いの原因だったのである．すそ野の部分では，線形の波である平面波

$$f \sim \exp\left[\pm i(kx-\omega t)\right]$$

または

$$f \sim \sin(kx-\omega t)$$

の寄せ集めではなく，ほんとうは指数関数的な波

$$f \sim \exp\left[\pm(px-\Omega t)\right] \qquad (1.9)$$

で表わされなければならないのである．この形の解は，通常の線形波動理論では非物理的解として捨てられる解である．なぜなら，$x=+\infty$ または $-\infty$ で f は無限大になるので，物理的境界条件を満たしていない．ところが非線形波動理論では，この解を図 1-5 のようにつなぎ合わせて，全体の解を構成するこ

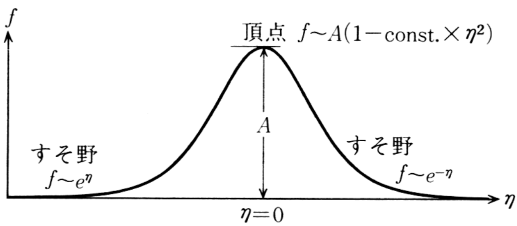


図 1-5　孤立波の頂点とすそ野における波形の近似式

とができるのである．

さて，すそ野の部分をこの指数関数的な解 $f \sim \exp(\pm\eta)$ で表わすことにすると，式(1.7)に代入して関係式(**非線形分散式**とも呼ばれている)

$$\Omega = v_0 p + \delta p^3$$

が得られる．このとき速度 v は

$$v = \frac{\Omega}{p} = v_0 + \delta p^2 \tag{1.10}$$

となる．これが頂点付近での速度(1.6)と一致するためには

$$\delta p^2 = \alpha A^m$$

でなければならない．p と A とがこのような関係にあるとき，孤立波は形を変えずに進行しうるのである．p はパルス幅に関係している．p が大きいほどパルスの立ち上がりが早くなり，パルス幅は狭くなる．この式は波高値が大きいパルスほどパルス幅は狭くなる($\delta, \alpha, m > 0$ のとき)ことを示している．

以上の結果は，非線形波動方程式の解法について重要なことを示唆している．解を摂動法によって求めようとするならば，第1近似としては，通常の平面波 $f \sim \sin(kx - \omega t)$ ではなく，線形理論では採用されない指数型の解 $f \sim \exp[\pm(px - \Omega t)]$ を選ばなければならないということである．つまり ε を小さなパラメータとして

$$\begin{aligned} f(x,t) &\sim \varepsilon a_1 \exp(\eta) + \varepsilon^2 a_2 \exp(2\eta) + \cdots \\ \eta &= px - \Omega t \end{aligned} \tag{1.11}$$

のように $\varepsilon \exp(\eta)$ のベキ乗で展開せよということである．一方 η の大きいところでは，図1-5から，

$$f(x,t) \sim \exp(-\eta) \tag{1.12}$$

となるべきである．f を $\exp(\eta)$ のベキ乗で展開し，η の大きいところで $\exp(-\eta)$ に漸近する解を求めることは，f にたいするパデ(Padé)近似

$$f = G/F \tag{1.13}$$

を求めることに相当する．そうであれば，初めから $f = G/F$ と従属変数を変換して非線形微分方程式の解を求めようというのがこの本の題目になっている

「直接法」の根本的なアイデアである．

［注］ パデ近似[1)]というのは，ある関数 $f(x)$ のベキ級数表示

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \tag{1.14}$$

を多項式 G と F の比によって有理関数として表現し，$f(x)$ の近似的解析接続を行ない，x の大きいところでの情報を得ようとする方法である．例えば，無限級数 $f(x)$

$$f(x) = x-x^3+x^5-x^7+\cdots \tag{1.15}$$

は領域 $|x|<1$ では収束するので，この領域における関数 $f(x)$ の情報(性質)を与えている．しかし，領域 $|x|\geqq 1$ では発散級数なので，無限級数のままで x に数値(例えば 2)を代入するのは意味をなさない．しかし，この関数の有理関数表示

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{1.15$'$}$$

を使うと，この関数は領域 $|x|\gg 1$ での $f(x)$ の値，x^{-1} も教えてくれる．たとえば，$x=\exp(\eta)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \exp(\eta)-\exp(3\eta)+\exp(5\eta)-\cdots \\ &= \frac{\exp(\eta)}{1+\exp(2\eta)} \\ &\sim \exp(-\eta) \qquad (\eta\gg 1) \end{aligned} \tag{1.16}$$

となって η が大きいときでも $f(x)$ の正しい値を示している．❙

非線形項の形を具体的に知らなくとも，直観的・物理的に解の大体の性質を知ることができたのであるが，それが厳密解とどの程度に一致しているのかを調べておこう．

1-2　非線形微分方程式の解

前節で非線形微分方程式(後の議論のために，座標 x', t' を使う)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'}+v_0\frac{\partial}{\partial x'}+\alpha f^m\frac{\partial}{\partial x'}+\delta\frac{\partial^3}{\partial x'^3}\right)f(x',t') = 0 \tag{1.17}$$

の解について直観的・物理的議論を行なったが，もうすこし数学を使って解の性質を調べよう．まず独立座標の変換をして速度 v_0 で動く座標

$$x = x' - v_0 t' \qquad t = t' \tag{1.18}$$

に移る．この変換によって微分演算は

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{1.19}$$

と変わる．速度 v_0 で動く座標では(1.17)式の第2項が消える．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha f^m \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f(x, t) = 0 \tag{1.20}$$

ここで解 f の**相似変換**(similarity transformation)を行なう．まず独立変数のスケール変換(ε は定数) $t = \varepsilon^3 \tau$, $x = \varepsilon \xi$ を行なう．この変換によって上式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \alpha f^m \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}\right) f(\varepsilon\xi, \varepsilon^3 \tau) = 0 \tag{1.21}$$

となる．ここで従属変数を $f(\varepsilon\xi, \varepsilon^3\tau) = \varepsilon^{-2/m} f'(\xi, \tau)$ とおくと

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \alpha (f')^m \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}\right) f'(\xi, \tau) = 0 \tag{1.22}$$

である．この式は，(1.20)式の f を

$$f'(\xi, \tau) = \varepsilon^{2/m} f(\varepsilon\xi, \varepsilon^3\tau) \tag{1.23}$$

とおいても，やはり同じ微分方程式の解になることを示している．これを相似変換という．だから解 f が進行波解 $f = f(x - vt)$ を表わすとき，$\varepsilon^{2/m} f(x - \varepsilon^2 vt)$ も解になる．これは孤立波の波高が $\varepsilon^{2/m}$ 倍になると速度 v は ε^2 倍になることを示している．このように解が具体的に求まらない場合でも(ほとんどの非線形微分方程式で具体的・解析的解は不明である)，解の相似変換によってある程度の性質を知ることができる．

孤立波の速度と波高の関係は，相似変換を使わなくても，偏微分方程式から直接知ることもできる．同じ非線形偏微分方程式をもういちど考えよう．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_0\frac{\partial}{\partial x}+\alpha f^m\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f(x,t)=0 \tag{1.24}$$

一定速度 v で進行している孤立波解 $f=f(x-vt)$（v は定数）を考える．このとき

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-v\frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.25}$$

である．これを代入すると

$$\left((-v+v_0)\frac{\partial}{\partial x}+\alpha f^m\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f(x-vt)=0 \tag{1.26}$$

となる．この式を x で積分して，孤立波の境界条件，$x=\pm\infty$ で

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x-vt)\to 0 \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.27}$$

を使うと，

$$(-v+v_0)f+\frac{\alpha}{m+1}f^{m+1}+\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}f=0 \tag{1.28}$$

である．この式に f_x をかけてもう一度 x で積分すると

$$(-v+v_0)f^2+\frac{2\alpha}{(m+1)(m+2)}f^{m+2}+\delta f_x{}^2=0 \tag{1.29}$$

が得られる．孤立波の山が最大になる x では f_x が 0 になる．

$$f_x=0 \qquad (f=f_{\max}\text{ のとき}) \tag{1.30}$$

したがって，上式より

$$(-v+v_0)f_{\max}{}^2+\frac{2\alpha}{(m+1)(m+2)}f_{\max}{}^{m+2}=0 \tag{1.31}$$

これより，孤立波の速度 v と波高 $f_{\max}$ の関係

$$v=v_0+\frac{2\alpha}{(m+1)(m+2)}f_{\max}{}^m \tag{1.32}$$

が得られた．

一方，(1.24)式で孤立波を表わす厳密解は

$$\begin{aligned} f&=A(\cosh\eta)^{-s}\\ \eta&=px-\Omega t+\text{const.}\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\Omega = v_0 p + \delta s^2 p^3$$
$$v = \Omega/p = v_0 + \delta s^2 p^2$$
$$A^m = (\delta/\alpha)(1+s)(2+s)p^2 \qquad (*)$$
$$s = 2/m$$

である．

前に，直観的・物理的に得た波高値 A とパラメータ p との関係式

$$A^m = (\delta/\alpha)p^2 \tag{1.34}$$

は，厳密解による関係式(＊)に対応している．

［注 1］ 厳密解があれば直観的・物理的な議論は必要ないと思うかもしれないが，そうではない．厳密解というのは非常に限られた方程式でしか発見されていない．たとえば次式のような非線形微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha f\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial^5}{\partial x^5}\right)f(x,t) = 0 \tag{1.35}$$

の孤立波を示す解析解はまだ求まっていない．このような場合でも直観的・物理的な議論を使って，解の大体のようすを知ることができるのである．❙

［注 2］ ソリトンというのはザブスキー(Zabusky)とクルスカル(Kruskal)が 1965 年に発表した論文[2)]の中で始めて使った言葉である．彼らは浅い水の波を記述する KdV 方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha v\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)v(x,t) = 0 \tag{1.36}$$

に対して計算機実験を行ない，孤立波が衝突しても壊れないことを発見し，この孤立波を soliton(ソリトン)(接尾語 -on は粒子を表わす)と命名した．

KdV 方程式の孤立波が衝突しても壊れないことを厳密に示すには，孤立波の衝突を表現している解を求めなければならない．ガードナー，グリーン，クルスカル，ミウラ(Gardner, Greene, Kruskal, Miura)は KdV 方程式のソリトン解を求める逆散乱法[3)]を 1967 年に発見した．❙

［注 3］ この本の題名になっている「直接法」とは，逆散乱を経由せずにソリトン解を直接求める方法の意味である．❙

この節のポイントは，「非線形性と分散性は，それぞれ単独ではパルス波形を壊す働きをするが，2つ同時に存在すれば互いに釣り合って，実質的にその効果を打ち消しあい，パルス波を形成する」ことである．

1-3　非線形微分方程式の線形化

線形微分方程式の解は「重ね合わせの原理」が成り立つので，特殊解を使って一般解を構成するのが比較的容易である．これに比べて非線形微分方程式の厳密解を求めるのは非常に難しい．「解の重ね合わせの原理」が成り立たないので，われわれの予想を裏切るような解が存在したりする．したがって，非線形微分方程式を解く方法としてまず第1に考えつくことは，「非線形微分方程式をある方法で線形微分方程式に変換する」ことである．しかし現在「どのような型の非線形微分方程式が線形化できるか？」の問いに答えることはできない．現在のわれわれにできることは「どのような非線形微分方程式が線形化できるか」，その例をいくつか上げることだけである．

a)　リッカティ方程式

最初に最も簡単な1階の非線形の常微分方程式であるリッカティ(Riccati)方程式

$$\frac{d}{dt}u(t) = a(t)+2b(t)u(t)+u(t)^2 \tag{1.37}$$

の線形化を行なう．従属変数 $u(t)$ を

$$u = g/f \tag{1.38}$$

と変換すると，t で微分して

$$u_t = \frac{g_t f - g f_t}{f^2} \tag{1.39}$$

を得る．（下添の文字はその変数での微分を表わす．）これを代入して分母を払うと

$$g_t f - g f_t = a(t)f^2 + 2b(t)gf + g^2 \tag{1.40}$$

となる．この式はさらに次のように整理される．

$$[g_t-a(t)f-b(t)g]f-[f_t+b(t)f+g]g=0 \tag{1.41}$$

ここで任意関数 $\lambda(t)$ を導入すると，この式は 2 個の線形微分方程式

$$\begin{aligned} f_t+b(t)f+g &= \lambda(t)f \\ g_t-a(t)f-b(t)g &= \lambda(t)g \end{aligned} \tag{1.42}$$

に分離される．

これがリッカティ方程式の線形化である．従属変数を有理関数 g/f に変換すると，非線形常微分方程式が線形(連立)常微分方程式に書き換えられるという事情は，次のバーガース方程式(非線形偏微分方程式)等についても見出される．

b) バーガース方程式

バーガース(Burgers)方程式

$$u_t=u_{xx}+2uu_x \tag{1.43}$$

はポテンシャル w を $u=w_x$ によって導入すると，1 回積分できて

$$w_t=w_{xx}+{w_x}^2+c \tag{1.44}$$

となる．c は任意の積分定数である．ここで $w=\log f$ とおくと

$$\frac{f_t}{f}=\frac{f_{xx}f-{f_x}^2}{f^2}+\frac{{f_x}^2}{f^2}+c$$

となる．右辺の第 2 項と第 3 項が打ち消しあうので，両辺に f を掛けると，線形方程式

$$f_t=f_{xx}+cf \tag{1.45}$$

が得られる．ここで用いられた従属変数の変換

$$u=(\log f)_x=f_x/f \tag{1.46}$$

を**コール・ホップ変換**(Cole–Hopf transformation)[4]という．

いままでの結果をまとめると，バーガース方程式

$$u_t=u_{xx}+2uu_x$$

はコール・ホップ変換

$$u=(\log f)_x=f_x/f$$

によって線形偏微分方程式

$$f_t = f_{xx} + cf$$

に変換される．このプロセスの逆を考えると，ある線形微分方程式から出発して非線形微分方程式を導出することができる．たとえば線形偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \qquad (n=2, 3, 4, \cdots) \tag{1.47}$$

はコール・ホップ変換の逆変換

$$f = \exp\left(\int u dx\right) \tag{1.48}$$

によって非線形偏微分方程式に変換される．$n=2$ の場合がバーガース方程式で，$n=3$ とすると次の非線形偏微分方程式

$$u_t = u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3{u_x}^2 + 3u^2u_x \tag{1.49}$$

が得られる．これとよく似た方程式(α, β を定数として)

$$u_t = u_{xxx} + \alpha uu_x + \beta u^2u_x \tag{1.50}$$

はソリトン方程式の 1 つで **MKdV** (modified Korteweg-de Vries) **方程式**と呼ばれている．この 2 つの方程式の解は全く違った構造をしている．

次に，独立変数 x の代わりに離散変数 n を使った微分差分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n = (1+u_n)(u_{n+1}-u_n) \tag{1.51}$$

を考える．この式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(1+u_n) = u_{n+1}-u_n \tag{1.52}$$

のように書ける．この式の左辺は log の t 微分であるから，右辺の u_n も，log の t 微分で書けると仮定して，従属変数の変換

$$u_n = (\log f_n)_t \tag{1.53}$$

を行なうと

$$\frac{\partial}{\partial t}\log[1+(\log f_n)_t] = \frac{\partial}{\partial t}\log\frac{f_{n+1}}{f_n} \tag{1.54}$$

となるので，t で積分して log をとると，線形方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}f_n = cf_{n+1} - f_n \tag{1.55}$$

が得られる．ここで c は積分定数である．

［注］ 微・差分バーガース方程式

$$u_{n,t} = (1+u_n)(u_{n+1}-u_n) \tag{1.56}$$

と非常によく似た微・差分方程式

$$u_{n,t} = (1+u_n)(u_{n+1}-u_{n-1}) \tag{1.57}$$

はソリトン方程式の一種であって，バーガース方程式とは違った解の構造をもっている． ❙

c) リウヴィル方程式

次の**リウヴィル方程式**(Liouville equation)

$$\phi_{xy} = \exp\phi \tag{1.58}$$

も線形化できることがよく知られている[5]．従属変数を

$$\exp\phi = -2(\log f)_{xy} \tag{1.59}$$

と変換する．これを(1.58)式の右辺に代入すると

$$\phi_{xy} = -2(\log f)_{xy} \tag{1.60}$$

となるので，この式を x と y で積分する．

$$\phi = -2\log f + \log g_1(x) + \log g_2(y) \tag{1.61}$$

$\log g_1(x)$ と $\log g_2(y)$ はそれぞれ x と y の任意関数であり，積分定数に相当するものである．後で式が簡単になるように log を付け加えた．ゆえに

$$\exp\phi = g_1(x)g_2(y)/f^2 \tag{1.62}$$

である．一方(1.59)式から

$$\exp\phi = -2(f_{xy}f - f_x f_y)/f^2 \tag{1.63}$$

両者を比較して，線形微分方程式

$$f_{xy} = 0$$
$$f_x = g_1(x)/2 \tag{1.64}$$
$$f_y = g_2(y)$$

が得られる．$u(x)$ と $v(y)$ をそれぞれ x と y の任意関数とすると

$$f = u(x)+v(y) \tag{1.65}$$

が線形微分方程式の解になる．ここで g_1 と g_2 は任意関数であるので $f_x=u_x=g_1(x)/2$，$f_y=v_y=g_2(y)$ はつねに成立している．したがってリウヴィル方程式 (1.58) の解は

$$\exp\phi = 2\frac{u_x(x)v_y(y)}{(u(x)+v(y))^2} \tag{1.66}$$

となる．

［注 1］ 解の基本になる f は

$$f = u(x)+v(y) \tag{1.67}$$

の形をしているが，これを

$$f = 1+u(x)+v(y)+\alpha u(x)v(y) \tag{1.68}$$

(α は任意定数) と置き換えても，$\exp\phi=-2(f_{xy}f-f_xf_y)/f^2$ はリウヴィル方程式の解になる．なぜなら

$$f = [1+\alpha u(x)]\{v(y)+[1+u(x)]/[1+\alpha u(x)]\}$$

と書き換えられるからである．▎

［注 2］ リウヴィル方程式 (1.58) は独立変数を変換すると，波動方程式

$$\phi_{xx}-\phi_{tt} = \exp\phi \tag{1.69}$$

になる．▎

［注 3］ 次の形のリウヴィル方程式

$$\phi_{xy} = -2\exp 2\phi \tag{1.70}$$

は，従属変数の変換

$$\phi = \log q_1 \tag{1.71}$$

によって

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log q_1 = -2{q_1}^2 \tag{1.72}$$

となるが，この式は，新しい従属変数 q_2 を微分方程式

$$q_2 = \frac{\partial}{\partial x} \log q_1 \tag{1.73}$$

によって導入すると

$$\frac{\partial}{\partial y} q_2 = -2{q_1}^2 \tag{1.74}$$

となり，リウヴィル方程式はつぎの連立非線形偏微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} q_1 &= q_1 q_2 \\ \frac{\partial}{\partial y} q_2 &= -2{q_1}^2 \end{aligned} \tag{1.75}$$

に変換される．この方程式とよく似た次項の 2 波相互作用の非線形偏微分方程式も同様に線形化可能である．❙

d)　2 波相互作用

2 波相互作用(two-waves interaction)を記述する微分方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right) &= -\phi_1 \phi_2 \\ \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right) &= \phi_1 \phi_2 \end{aligned} \tag{1.76}$$

である．この式は速さ c_1 で移動する被捕食者(喰われるもの)の群れ ϕ_1 と速さ c_2 で移動する捕食者(喰うもの)の群れ ϕ_2 の相互作用を示すモデル方程式[6]である．

この方程式は，独立変数の変換

$$\begin{aligned} \xi &= (x - c_2 t)/(c_1 - c_2) \\ \eta &= -(x - c_1 t)/(c_1 - c_2) \end{aligned} \tag{1.77}$$

によって

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = -\phi_1\phi_2$$
$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = \phi_1\phi_2 \tag{1.78}$$

となる．従属変数 ϕ_1, ϕ_2 を次のように変換しよう．

$$\phi_1 = -\frac{\partial}{\partial \eta}\log f$$
$$\phi_2 = \frac{\partial}{\partial \xi}\log f \tag{1.79}$$

これを上式に代入すると，f に対する線形微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f = 0 \tag{1.80}$$

が得られる．この方程式の一般解はリウヴィル方程式の場合と同じく

$$f = u(\xi) + v(\eta) \tag{1.81}$$

である．

［注 1］　リウヴィル方程式と 2 波相互作用の方程式はよく似た構造をしている．戸田分子方程式の特別の場合がリウヴィル方程式であり，2 波相互作用の方程式は，戸田分子方程式のバックルンド変換により生成される方程式の特別の場合であることを第 4 章で示す．したがって 2 波相互作用の方程式もソリトン方程式の一種である．▎

図 1-6 はスピード c_2 ($>c_1$) で移動している捕食者の群れがスピード c_1 で移動している被捕食者の群れに追いついて成長している様子を示している．衝突の前後で孤立波の大きさが異なっているので，普通のソリトンの衝突とは違うが，戸田分子方程式から生まれるある種のソリトンの衝突を示している図である．

［注 2］　図 1-6 では次のような f を選んでいる．

$$f = A - b_1 \tanh(p_1\eta) + b_2 \tanh(p_2\xi) \qquad ▎$$

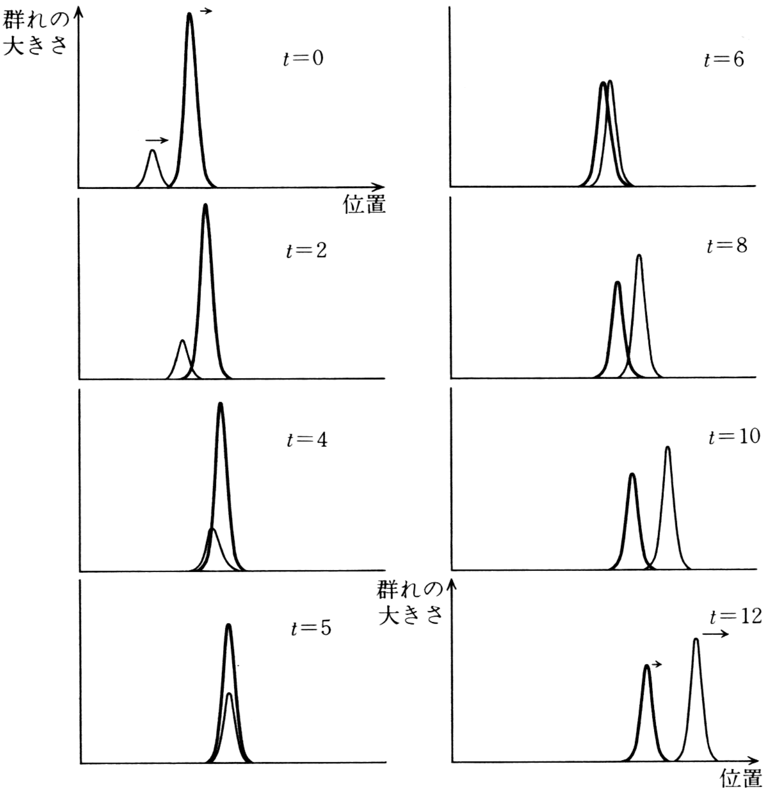


図 1–6　スピード $c_2(>c_1)$ で移動する捕食者の群れが，スピード c_1 で移動する被捕食者の群れに追いつき，増加している．細い線は捕食者の群れの大きさを，太い線は被捕食者の群れの大きさを示している．$t=0$ で捕食者の群れの先頭部分が被捕食者の後部に接している．$t=4, 5, 6$ で捕食者は被捕食者を食って盛んに増殖している．$t=12$ で 2 つの群れは離れていく．この後，群れの大きさは不変である．

1–4　直接法の要点

1–3 節で，ある種の非線形微分方程式は従属変数の変換によって線形微分方程式に帰着できることを示した．線形化できると厳密解を求めるのは比較的容易である．しかし非線形微分方程式の中で非常に特殊なものだけが線形化でき

るのである．この制約をすこしでも緩めて，もうすこし広い範囲の非線形微分方程式の厳密解が求まるようにしたい．この節では，非線形微分方程式をある種の双線形微分方程式(広田形式の微分方程式)に変換し，摂動計算によって厳密解を求める方法について述べる．この方法は逆散乱問題を経由せずに直接的に解を求める方法なので**直接法**(direct method)とよぶ．外国では **Hirota's method** とよばれている．

［注］ 双線形形式とは x_j についての1次式 $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j$ を，x_i と y_j についての2次式 $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}x_iy_j$ に拡張したもので，y_j を固定して変数 x_i だけに注目すると x_i の1次式であり，x_i を固定して変数 y_j に注目すると y_j の1次式になっているものである．しかし，ここで述べる双線形微分方程式はこの性質を必ずしも満たしていないので，「双線形形式」ではなく「2次形式」と呼ぶべきであるかも知れない．❙

直接法とはどのような方法であるのか，その感触をつかんでもらうために，典型的なソリトン方程式である**コルテヴェーグ・ドフリース方程式**(Korteweg-de Vries equation，KdV 方程式と略称)

$$u_t+6uu_x+u_{xxx} = 0 \tag{1.82}$$

を例にとって，直接法の基本的考え方を説明する．数式をチェックをしないで読み流して下さい．

まず初めに，式(1.82)を通常の摂動計算で解く．ε を小さいパラメータとして u を

$$u = \varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3+\cdots$$

と展開し，式(1.82)に代入する．ε の各オーダーで整理すると，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)u_1 = 0 \tag{1.83a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)u_2 = -6u_1u_{1x} \tag{1.83b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)u_3 = -6(u_2u_{1x}+u_1u_{2x}) \tag{1.83c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

を得る．1–1 節で注意したように，孤立波解を求めるときには第 1 近似の式(1.83a)の解 u_1 として平面波ではなく，指数関数の解を選ぶ必要がある．したがって

$$u_1 = a_1 \exp \eta \qquad \eta = Px - \Omega t \qquad \Omega = P^3 \tag{1.84}$$

となる．ここで a_1, P は任意パラメータである．この解 u_1 を第 2 近似の式(1.83b)に代入すると，u_2 に対する線形方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) u_2 = -6{a_1}^2 P \exp 2\eta \tag{1.85}$$

となる．この式を解いて

$$u_2 = a_2 \exp 2\eta \qquad a_2 = -{a_1}^2/P^2 \tag{1.86}$$

を得る．この解 u_2 を第 3 近似の式(1.83c)に代入すると u_3 に対する線形方程式が得られ，それを解いて，次々に u_i $(i=1, 2, 3, \cdots)$ を求めることができる．そして解 u は

$$u = \varepsilon a_1 \exp \eta + \varepsilon^2 a_2 \exp 2\eta + \varepsilon^3 a_3 \exp 3\eta + \cdots \tag{1.87}$$

となるが，右辺は発散級数($\eta \to$無限大のとき)となる．そこでパデ(Padé)近似の考え方を使って u を多項式の比 G/F の形にまとめることが考えられるが，どのような F, G を選ぶのが適切であるか指導原理もはっきりしないし，その上計算のための労力が大変である．

それよりも初めから $u=G/F$ と従属変数を変換し，F と G に対する微分方程式を導き，微分方程式の解として F と G を求めるほうが簡単のように思われる．事実 1–2 節の結果から

$$u = \frac{P^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\eta}{2} = \frac{2P^2 \exp \eta}{(1+\exp \eta)^2} \tag{1.88}$$

である．この形を参考にして $u=G/F$ とおいて，式(1.82)に代入し F と G を摂動計算で求めることにする．

$$
\begin{aligned}
u &= G/F \\
u_t &= (G_tF - GF_t)/F^2 \\
u_x &= (G_xF - GF_x)/F^2 \\
u_{xxx} &= G_{xxx}/F - (3G_{xx}F_x + 3G_xF_{xx} + GF_{xxx})/F^2 \\
&\quad + 6[(G_xF_x{}^2 + GF_{xx}F_x)/F^3 - GF_x{}^3/F^4]
\end{aligned}
$$

を KdV 方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&(G_tF - GF_t)/F^2 + 6(G/F)(G_xF - GF_x)/F^2 \\
&\quad + (G_{xxx}F - 3G_{xx}F_x - 3G_xF_{xx} - GF_{xxx})/F^2 \\
&\quad\quad + 6(FG_xF_x{}^2 + FGF_{xx}F_x - GF_x{}^3)/F^4 = 0
\end{aligned} \tag{1.89}
$$

を得る．予想外に複雑な式になる．

蛇足．現在では数式処理システムが発達しているので，こういう計算は計算機で簡単にできるが，計算機を使うと式の構造が見抜けない場合があるので，式の変形を考えながら手でゆっくり計算することも大切である．❙

この F, G に対する複雑な方程式を**分離**(decoupling)し，簡単な方程式に帰着させることを考える．いろいろと分離方法があるが，1 つの方法として「分母が F^2 と F^4 の項をそれぞれ 0 にする」ことを思いつくが，F^2 の項は

$$
G_tF - GF_t + G_{xxx}F - 3G_{xx}F_x - 3G_xF_{xx} - GF_{xxx} = 0 \tag{1.90}
$$

である．しかしこの方程式では，孤立波解

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{2P^2 \exp\eta}{(1+\exp\eta)^2} \\
\eta &= Px - \Omega t
\end{aligned} \tag{1.91}
$$

に対応する

$$
\begin{aligned}
F &= (1+\exp\eta)^2 \\
G &= 2P^2 \exp\eta
\end{aligned} \tag{1.92}
$$

を代入しても解にはならない．そこで逆に考えて，この F と G を解にもつような式を探すことにする．不思議なことに $-3G_xF_{xx}$ の項の符号が + であればよいことが判る．そこでこの符号を + にし，おつりは分母が F^4 の項に繰り込むことにする．そうすると，式(1.89)は

$$(G_tF-GF_t+G_{xxx}F-3G_{xx}F_x+3G_xF_{xx}-GF_{xxx})/F^2$$
$$+6(G_xF-GF_x)[GF-(FF_{xx}-F_x{}^2)]/F^4=0$$

とまとめられる．したがって decoupling として

$$G_tF-GF_t+G_{xxx}F-3G_{xx}F_x+3G_xF_{xx}-GF_{xxx}=0 \tag{1.93a}$$
$$FF_{xx}-F_x{}^2-GF=0 \tag{1.93b}$$

を採用する．この連立微分方程式は F と G にたいして双線形(2 次形式)であり，微分の形式に特徴があるので，一組の関数 $a(x), b(x)$ に作用する新しい微分演算子(2 項演算子)D–operator を導入する[7),8)]．

$$D_x{}^n(a,b)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)^n a(x)b(y)\Big|_{y=x}$$
$$=\frac{\partial^n}{\partial y^n}a(x+y)b(x-y)\Big|_{y=0} \tag{1.94}$$

$$D_t{}^mD_x{}^n(a,b)\equiv\frac{\partial^m}{\partial s^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n}a(t+s,x+y)b(t-s,x-y)\Big|_{\substack{s=0\\y=0}} \tag{1.95}$$

ここで $m,n=0,1,2,3,\cdots$ である．

この 2 項演算子の記号 $D_x{}^n(a,b)$ は書くのが面倒なので，以下次の省略記号

$$D_x{}^n(a,b)\equiv D_x{}^na\cdot b \tag{1.96}$$

に代える．D–operator は **Hirota derivative(広田微分)**[9)]とも呼ばれている．

この記号を使うと

$$D_tG\cdot F=G_tF-GF_t$$
$$D_xG\cdot F=G_xF-GF_x$$
$$D_x{}^3G\cdot F=G_{xxx}F-3G_{xx}F_x+3G_xF_{xx}-GF_{xxx}$$
$$D_x{}^2F\cdot F=2(F_{xx}F-F_x{}^2)$$

となるので，式(1.93a)と(1.93b)は

$$(D_t+D_x{}^3)G\cdot F=0 \tag{1.97a}$$
$$D_x{}^2F\cdot F-2GF=0 \tag{1.97b}$$

と簡明に表現される．

一方，KdV 方程式

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.82}$$

は従属変数 u のもう 1 つの変換

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.98}$$

によって

$$\frac{\partial}{\partial x}[(f_{xt}f-f_xf_t+f_{xxxx}f-4f_{xxx}f_x+3f_{xx}{}^2)/f^2]=0 \tag{1.99}$$

と変換されるので，c を積分定数として

$$f_{xt}f-f_xf_t+f_{xxxx}f-4f_{xxx}f_x+3f_{xx}{}^2=cf^2 \tag{1.100}$$

の形の双線形方程式が得られる[10].

［注］ 孤立波(ソリトン)解を求めるときには積分定数 c は 0 と選べる. ❙

この式($c=0$)も D-operator を使って

$$(D_xD_t+D_x{}^4)f\cdot f=0 \tag{1.101}$$

と簡明に表現される.

［注 1］ 左辺の演算子は次式のように書くこともある.

$$D_x(D_t+D_x{}^3)f\cdot f=0 \quad ❙ \tag{1.101$'$}$$

［注 2］ 式(1.97a), (1.97b)や(1.101)は**広田の双線形形式**(Hirota's bilinear form)[9]と呼ばれている. ❙

［注 3］ ここで使った従属変数 u にたいする 2 種類の変換

$$u=G/F, \qquad u=2(\log f)_{xx}$$

から

$$F=f^2, \qquad G=2(f_{xx}f-f_x{}^2) \tag{1.102}$$

と推定できるが，この F と G が式(1.97a)と(1.97b)を満たすことは自明ではない. ❙

新しい微分演算子 D-operator の詳しい公式について次節でまとめるが，ここでは双線形方程式

$$D_x(D_t+D_x{}^3)f\cdot f=0 \tag{1.103}$$

を摂動で解くのに必要な公式のみを列記する.

$$D_xD_t a\cdot 1 = a_{xt} = D_tD_x 1\cdot a \tag{1.104a}$$

$$D_x^{\,4} a\cdot 1 = a_{xxxx} = D_x^{\,4} 1\cdot a \tag{1.104b}$$

$$D_x^{\,m}D_t^{\,n} \exp\eta_1\cdot\exp\eta_2 = (P_1-P_2)^m(\Omega_1-\Omega_2)^n \exp(\eta_1+\eta_2) \tag{1.104c}$$

$$\eta_i = P_i x+\Omega_i t+\eta_i^{\,0}$$

通常の摂動計算と同じように f を小さなパラメータ ε のベキで展開する.

$$f = 1+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^3 f_3+\cdots \tag{1.105}$$

これを式(1.103)に代入して ε のベキで整理すると

$$\varepsilon\ :\ \ D_x(D_t+D_x^{\,3})(f_1\cdot 1+1\cdot f_1) = 0$$

$$\varepsilon^2:\ \ D_x(D_t+D_x^{\,3})(f_2\cdot 1+f_1\cdot f_1+1\cdot f_2) = 0$$

$$\varepsilon^3:\ \ D_x(D_t+D_x^{\,3})(f_3\cdot 1+f_2\cdot f_1+f_1\cdot f_2+1\cdot f_3) = 0$$

……………

となる. 第1近似の式は上述の公式によって, f_1 に対する線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f_1 = 0 \tag{1.106}$$

になる. 孤立波(1–ソリトン)に対応する解は

$$f_1 = \exp\eta_1 \tag{1.107}$$

$$\eta_1 = P_1 x+\Omega_1 t+\eta_1^{\,0}$$

$$\Omega_1+P_1^{\,3} = 0$$

である. 第2近似の式は

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f_2 = -D_x(D_t+D_x^{\,3})f_1\cdot f_1 \tag{1.108}$$

と整理されるが, 右辺に $f_1=\exp\eta_1$ を代入すると D–operator の性質(1.104c)によって, 右辺は0になる. したがって f_2 は0と選べるのである.

このように f の展開式は有限項で切れて

$$f = 1+\varepsilon f_1 \tag{1.109}$$

となる. 摂動展開のパラメータ ε は η_1 の中の $\eta_1^{\,0}$ 項に繰り込めるので, 結局

$$f = 1+\exp\eta_1 \tag{1.110}$$

が双線形方程式の厳密(1–ソリトン)解

$$u = 2[\log(1+\exp\eta_1)]_{xx} = \frac{2P_1{}^2\exp\eta_1}{(1+\exp\eta_1)^2} = \frac{P_1{}^2}{2}\mathrm{sech}^2\frac{\eta_1}{2} \tag{1.111}$$

を与える．

［注 1］ KdV 方程式の 1-ソリトン解は 2 つの任意パラメータを含んでいる．それはソリトンの位置を示すパラメータ $\eta_1{}^0$ とソリトンの波高値に関係するパラメータ P_1 である．▎

［注 2］ 双線形の微分方程式では新しい微分演算子 $D_x{}^mD_t{}^n$ が，次の性質

$$D_x{}^mD_t{}^n\exp\eta_1\cdot\exp\eta_1 = 0 \tag{1.112}$$

をもつため，摂動展開が有限の項で切れて，厳密解が得られるのである．これが通常の微分方程式との大きな違いである．通常の微分では右辺が 0 にならないので，摂動展開の第 2 項 f_2 が 0 にならず，高次の線形微分方程式の解として決定され，この f_2 を第 3 近似の式に代入し，f_3 が決定され，… と無限級数になるのである．▎

［注 3］ 2-ソリトン解(任意パラメータ 4 つを含む解)を求めるときには，出発点の第 1 近似の線形微分方程式の解 f_1 に「重ね合わせの原理」を使うのである．すなわち

$$f_1 = \exp\eta_1+\exp\eta_2 \tag{1.113}$$
$$\eta_i = P_ix+\Omega_it+\eta_i{}^0$$
$$\Omega_i+P_i{}^3 = 0 \qquad (i=1,2)$$

と仮定するのである．こんどは摂動計算の結果第 2 項までは残るが，第 3 項が 0 になって，

$$f = 1+\varepsilon(\exp\eta_1+\exp\eta_2)+\varepsilon^2a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \tag{1.114}$$

の形で厳密解が求まるのである．この式から得られる $u=2(\log f)_{xx}$ は 2 つのソリトンの衝突の様子を記述している．▎

蛇足．忙しくてじっくり勉強する暇のない人のために，KdV 方程式を例にとって，直接法の要点を手短に述べた．数学書の中には最後の最後までまじめに読まないと何が書いてあるのかよく判らない本が多いので，あえて最初に要

点だけをまとめてみた. ❙

1–5　新しい微分演算子 D–operator

前節で導入した D–operator[7] の特性について詳しく述べる. D–operator の定義は $m, n=0, 1, 2, 3, \cdots$ にたいして

$$D_t^m D_x^n a(t, x)\cdot b(t, x) = \frac{\partial^m}{\partial s^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n}a(t+s, x+y)b(t-s, x-y)\Big|_{\substack{s=0\\y=0}} \tag{1.115}$$

である. 比較のため関数の積の微分にたいするライプニッツの公式を類似の形に書くと,

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{\partial^n}{\partial x^n}a(t, x)b(t, x) = \frac{\partial^m}{\partial s^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n}a(t+s, x+y)b(t+s, x+y)\Big|_{\substack{s=0\\y=0}} \tag{1.116}$$

である.

［注 1］　一組の関数のペア f と g に作用する演算子 O を数学では **2 項演算子** (binary operator) といい, 次のように表現する.

$$O(f, g)$$

D–operator は 2 項演算子であるので, 正式には

$$D_x^n(a(t, x), b(t, x))$$

のように書くべきであるが, D–operator を多用しているうちに括弧(,)を使うのが面倒になり

$$D_x^n a(t, x)\cdot b(t, x)$$

のように省略して書くようになった. ❙

［注 2］　上の D–operator の定義式では m, n を自然数 0, 1, 2, … としたが, m, n が非整数の場合に拡張することが研究課題として残っている. ❙

定義式だけでは D–operator の性質が分かりにくいので, 簡単な例を挙げて説明する.

$$\begin{aligned} D_x a\cdot b &= a_x b - ab_x \\ D_x{}^2 a\cdot b &= a_{xx}b - 2a_x b_x + ab_{xx} \\ D_x{}^3 a\cdot b &= a_{xxx}b - 3a_{xx}b_x + 3a_x b_{xx} - ab_{xxx} \end{aligned} \tag{1.117}$$

である．一方，関数の積にたいする普通の微分では

$$\begin{aligned} \partial_x ab &= a_x b + ab_x \\ \partial_x{}^2 ab &= a_{xx}b + 2a_x b_x + ab_{xx} \\ \partial_x{}^3 ab &= a_{xxx}b + 3a_{xx}b_x + 3a_x b_{xx} + ab_{xxx} \end{aligned} \tag{1.118}$$

である．ここで省略記号 $\partial_x{}^n \equiv \partial^n/\partial x^n$ を使った．

［注］ D-operator の微分則は普通の微分とほとんど同じだが，偶数番目の項の符号がマイナスになると記憶するのが便利である．❙

定義より

$$\begin{aligned} D_t{}^m D_x{}^n a\cdot b &= D_x{}^n D_t{}^m a\cdot b = D_x{}^{n-1} D_t{}^m D_x a\cdot b \\ D_t{}^m D_x{}^n a\cdot 1 &= \partial_t{}^m \partial_x{}^n a \end{aligned} \tag{1.119}$$

また，2 項展開

$$(D_t+\varepsilon D_x)^n = D_t{}^n + n\varepsilon D_t{}^{n-1}D_x + n(n-1)/2 D_t{}^{n-2}D_x{}^2 + \cdots + \varepsilon^n D_x{}^n$$

を使うと，微分演算子の線形性によって

$$(D_t+\varepsilon D_x)^n a\cdot b = D_t{}^n a\cdot b + n\varepsilon D_t{}^{n-1}D_x a\cdot b + \cdots + \varepsilon^n D_x{}^n a\cdot b \tag{1.120}$$

を得る．これより，たとえば $(D_t+\varepsilon D_x)^3 a\cdot b$ の ε^2 の係数として D-operator の積 $3D_t D_x{}^2 a\cdot b$ を計算することもできる．

次の演算子 D_z と微分 ∂_z を導入する．

$$\begin{aligned} D_z &= D_t + \varepsilon D_x \\ \partial_z &= \partial_t + \varepsilon \partial_x \end{aligned} \tag{1.121}$$

関数のペア $a(t,x)$ と $b(t,x)$ の順序を入れ換えると

$$D_z{}^n b\cdot a = (-1)^n D_z{}^n a\cdot b \tag{1.122}$$

となるので，n が奇数のとき

$$D_z{}^n a\cdot a = 0 \tag{1.123}$$

である．D-operator が普通の微分と際立って違うのは，このように演算の結

果が0になる場合が多いことである．zを新しい独立変数と考えたとき普通の微分∂_zをペアの関数$a(z), b(z)$に演算した結果が0になるのは，関数$a(z), b(z)$の積が定数になる場合だけである．このことはD-operatorを使った双線形方程式の方が，普通の微分方程式に比べて，解を求めやすい(解の種類が多い)ことを意味している．

$$D_z a\cdot b = 0 \quad \text{のとき} \qquad a = \text{const.}\times b \tag{1.124}$$

である．

次に任意の関数a, b, cに対して，恒等式

$$D_z(D_z a\cdot b)\cdot c + D_z(D_z b\cdot c)\cdot a + D_z(D_z c\cdot a)\cdot b = 0 \tag{1.125}$$

が成り立つ．これは$[a, b] \equiv D_z a\cdot b$とおくと，ヤコビの恒等式

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0 \tag{1.126}$$

である．このことはD-operatorとリー環の結びつきを示唆している．

［注］ D-operatorで記述されている双線形方程式とカッツ・ムーディ・リー(Kac–Moody–Lie)環との深い結びつきが京都グループ(佐藤，佐藤，伊達，柏原，神保，三輪)によって発見されている[9),11),12),13)]．❙

δをパラメータとして指数関数のD-operatorを次式で定義する．

$$\begin{aligned}\exp(\delta D_z)a(z)\cdot b(z) &= \exp(\delta\partial_y)a(z+y)b(z-y)|_{y=0}\\ &= a(z+\delta)b(z-\delta)\end{aligned} \tag{1.127}$$

関数a, bがzで任意回微分可能のとき，右辺の$a(z+\delta)$と$b(z-\delta)$をδのベキにテイラー展開すると，

$$\begin{aligned}&(1+\delta D_x + (1/2)\delta^2 D_x{}^2 + (1/6)\delta^3 D_x{}^3 + \cdots)a(x)\cdot b(x)\\ &\quad = [a+\delta a_x + (1/2)\delta^2 a_{xx} + \cdots][b-\delta b_x + (1/2)\delta^2 b_{xx} - \cdots]\end{aligned} \tag{1.128}$$

であるので，δ^nの係数から$D_x{}^n a\cdot b$にたいする展開式(1.117)などが得られる．

次に

$$\begin{aligned}D_z{}^n a\cdot b &= D_z{}^{n-1} D_z a\cdot b\\ &= D_z{}^{n-1}(a_z\cdot b - a\cdot b_z)\end{aligned} \tag{1.129}$$

について調べよう．この式では演算子$D_z{}^n$の定義式に演算子$D_z{}^{n-1}$が使われている，いわゆる再帰的定義になっているので，数式処理で任意のnに対して

演算子 D_z^n を定義するのに適している．例えば数式処理言語 REDUCE[14] では

```
Operator D;
forall a,b,n,z such that fixp(n) and n>=0 let
 D(a,b,z,n)=if n>0 then D(DF(a,z),b,z,n-1)-D(a,DF(b,z),z,n-1)
             else a*b;
```

と定義できる．

$a=b$ のとき，

$$\begin{aligned} D_z^n a\cdot a &= D_z^{n-1} D_z a\cdot a \\ &= D_z^{n-1}(a_z\cdot a - a\cdot a_z) \\ &= 2D_z^{n-1} a_z\cdot a \qquad (n \text{ が偶数のとき}) \end{aligned} \tag{1.130}$$

である．

指数関数に対して，

$$D_z^n \exp(p_1 z)\cdot\exp(p_2 z) = (p_1 - p_2)^n \exp[(p_1+p_2)z] \tag{1.131}$$

である．普通の微分では

$$\partial_z^n \exp(p_1 z)\cdot\exp(p_2 z) = (p_1 + p_2)^n \exp[(p_1+p_2)z] \tag{1.132}$$

となるので，

$$D_z^n \exp(p_1 z)\cdot\exp(p_2 z) = \frac{(p_1-p_2)^n}{(p_1+p_2)^n}\partial_z^n \exp[(p_1+p_2)z] \tag{1.133}$$

である．一般に F を $D_t, D_x, \cdots$ の多項式として

$$\begin{aligned} &F(D_t, D_x, \cdots)\exp\eta_1\cdot\exp\eta_2 \\ &\quad = \frac{F(\omega_1-\omega_2, P_1-P_2, \cdots)}{F(\omega_1+\omega_2, P_1+P_2, \cdots)} F(\partial_t, \partial_x, \cdots)\exp(\eta_1+\eta_2) \end{aligned} \tag{1.134}$$

となる．ここで $i=1, 2, \cdots$ にたいして

$$\eta_i = P_i x + \omega_i t + \cdots$$

である．この公式は双線形方程式

$$F(D_t, D_x, \cdots) f\cdot f = 0 \tag{1.135}$$

の 2-ソリトン解を表示するときに使う．

関数の積 ab と cd に対して，

$$\exp(\delta D_z)ab\cdot cd = [\exp(\delta D_z)a\cdot c][\exp(\delta D_z)b\cdot d] \tag{1.136}$$

$$= [\exp(\delta D_z)a\cdot d][\exp(\delta D_z)b\cdot c] \tag{1.137}$$

である．この公式は，次の**交換公式**(exchange formula)と同様に，たんなる「記号の定義」と「式の順序の入れ換え」だけで証明できるので，見掛けではそれほど意味が深い公式とは思えないが，双線形方程式の変換には絶大なる威力を発揮する公式である．

公式(1.136)の証明は

$$\begin{aligned}&\exp(\delta D_z)a(z)b(z)\cdot c(z)d(z)\\&= a(z+\delta)b(z+\delta)c(z-\delta)d(z-\delta) \quad &&(\text{定義により})\\&= a(z+\delta)c(z-\delta)b(z+\delta)d(z-\delta) \quad &&(\text{式の入れ換え})\\&= [\exp(\delta D_z)a\cdot c][\exp(\delta D_z)b\cdot d] \quad &&(\text{定義により})\end{aligned}$$

のように簡単である．この公式から派生的に次の公式がでる．

$$D_z ab\cdot c = a_z bc + aD_z b\cdot c \tag{1.138}$$

$$D_z ab\cdot b = a_z b^2 \tag{1.139}$$

$$D_z{}^2 ab\cdot c = a_{zz} bc + 2a_z D_z b\cdot c + aD_z{}^2 b\cdot c \tag{1.140}$$

$$D_z{}^2 ab\cdot b = a_{zz} b^2 + aD_z{}^2 b\cdot b \tag{1.141}$$

$$D_z{}^2 ab\cdot cd = (D_z{}^2 a\cdot c)bd + 2(D_z a\cdot c)(D_z b\cdot d) + ac(D_z{}^2 b\cdot d) \tag{1.142}$$

$$D_z{}^3 ac\cdot bc = (D_z{}^3 a\cdot b)c^2 + 3(D_z a\cdot b)(D_z{}^2 c\cdot c) \tag{1.143}$$

$$D_z{}^m \exp(pz)a(z)\cdot\exp(pz)b(z) = \exp(2pz)D_z{}^m a(z)\cdot b(z) \tag{1.144}$$

これらは上の公式で δ の同じベキの項を等置し，a, b, c, d を適当に選べば証明できる．

［注 1］　量子力学の基本的方程式であるシュレーディンガー方程式

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - V\Psi = 0 \tag{1.145}$$

も，式(1.139)と(1.141)を使うと，双線形方程式

$$(iD_t + D_x{}^2)f'\cdot f = 0 \tag{1.146}$$

に変換される．ここで

$$\begin{aligned}f' &= \Psi f\\V &= -D_x{}^2 f\cdot f/f^2 = -2(\log f)_{xx}\end{aligned}$$

と置いた．∎

［注 2］ 式(1.144)は，双線形方程式

$$F(D_t, D_x, \cdots) f \cdot f = 0 \tag{1.147}$$

の解 f が，変換

$$f(x) \to \exp(ax) f(x) \tag{1.148}$$

によって不変，すなわち

$$\begin{aligned} &F(D_t, D_x, \cdots) \exp(ax) f \cdot \exp(ax) f \\ &\quad = \exp(2ax) F(D_t, D_x, \cdots) f \cdot f = 0 \end{aligned} \tag{1.149}$$

であることを意味する．このことと，もう 1 つの変換

$$\begin{aligned} f(x) &\to \exp(b\partial_x) \exp(c) f(x) \\ &= \exp(c) f(x+b) \end{aligned} \tag{1.150}$$

によって双線形方程式の解が不変であることは，双線形方程式に作用する群の存在($ax, b\partial_x, c$ はリー代数をなしている)を示唆している．∎

蛇足．リー代数との結びつきが発見されるまでは，解 f がこのような変換によって不変であること，すなわち解に不定性があることは，双線形方程式の欠陥であると見なされていた．∎

次の公式は**バックルンド変換**(Bäcklund transformation)を導くときに絶大な威力を発揮する公式である．**交換公式**(exchange formula)と呼ぶことにする．交換公式の最も簡単な場合

$$\begin{aligned} &\exp(\alpha D_z)[\exp(\beta D_z) a \cdot b] \cdot [\exp(\gamma D_z) c \cdot d] \\ &\quad = \exp\left[\frac{\beta-\gamma}{2} D_z\right]\left[\exp\left[\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right) D_z\right] a \cdot d\right] \\ &\qquad \cdot \left[\exp\left[\left(-\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right) D_z\right] c \cdot b\right] \end{aligned} \tag{1.151}$$

を最初に証明する．

a と c の位置はそのままで b と d の位置が入れ換わっていることに注意する．

バックルンド変換とは，ある微分方程式の解と別の微分方程式の解とを結ぶ変換である．後で見るように，バックルンド変換とは単に「入れ換え」にすぎないことが判る．簡単すぎてかえってバックルンド変換の意味が判らなくなってしまうくらいである．交換公式も「記号の定義」と「式の順序の入れ換え」だけで証明できる．

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha D_z)[\exp(\beta D_z)a\cdot b]\cdot[\exp(\gamma D_z)c\cdot d] \\
&\quad = \exp(\alpha D_z)a(z+\beta)b(z-\beta)\cdot c(z+\gamma)d(z-\gamma) \\
&\quad = a(z+\alpha+\beta)b(z+\alpha-\beta)c(z-\alpha+\gamma)d(z-\alpha-\gamma) \qquad (\text{記号の定義}) \\
&\quad = a(z+\alpha+\beta)d(z-\alpha-\gamma)c(z-\alpha+\gamma)b(z+\alpha-\beta) \qquad (\text{入れ換え})
\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}
&\exp(c_1D_z)[\exp(c_2D_z)a\cdot d]\cdot[\exp(c_3D_z)c\cdot b] \\
&\quad = a(z+c_1+c_2)d(z+c_1-c_2)c(z-c_1+c_3)b(z-c_1-c_3) \qquad (\text{記号の定義})
\end{aligned}$$

である．交換公式が成立するためには

$$\begin{aligned}
c_1+c_2 &= \alpha+\beta \\
c_1-c_2 &= -\alpha-\gamma \\
-c_1+c_3 &= -\alpha+\gamma \\
-c_1-c_3 &= \alpha-\beta
\end{aligned}$$

でなければならない．c_1, c_2, c_3 は，

$$\begin{aligned}
c_1 &= (\beta-\gamma)/2 \\
c_2 &= \alpha+(\beta+\gamma)/2 \\
c_3 &= -\alpha+(\beta+\gamma)/2
\end{aligned}$$

と決定される．これで交換公式が証明された．

上の交換公式は微分演算子の線形性によって次式のように拡張できる．

$$\begin{aligned}
&\exp(D_1)[\exp(D_2)a\cdot b]\cdot[\exp(D_3)c\cdot d] \\
&\quad = \exp\left(\frac{D_2-D_3}{2}\right)\left[\exp\left(D_1+\frac{D_2+D_3}{2}\right)a\cdot d\right] \\
&\qquad \cdot\left[\exp\left(-D_1+\frac{D_2+D_3}{2}\right)c\cdot b\right] \qquad (1.152)
\end{aligned}$$

ここで D_i $(i=1,2,3)$ は D_t, D_x, D_y の線形結合である.

$$D_i = \alpha_i D_t + \beta_i D_x + \gamma_i D_y \tag{1.153}$$

D–operator に対して次の恒等式が成り立つ.

（イ）　任意の関数 a, b, c, d に対して

$$\begin{aligned}&[\sinh(\delta D_z)a\cdot b][\exp(\delta D_z)c\cdot d]\\&+[\sinh(\delta D_z)b\cdot c][\exp(\delta D_z)a\cdot d]\\&+[\sinh(\delta D_z)c\cdot a][\exp(\delta D_z)b\cdot d]=0\end{aligned}$$

が成立する. この式を δ で展開して δ の 1 次の項を集めると, 恒等式

$$(D_z a\cdot b)c+(D_z b\cdot c)a+(D_z c\cdot a)b=0 \tag{1.154}$$

が得られる.

（ロ）　任意の関数 a, b, c, d に対して

$$\begin{aligned}&\sinh(\delta D_z)[\sinh(\delta D_z)a\cdot b]\cdot[\cosh(\delta D_z)c\cdot d]\\&+\sinh(\delta D_z)[\sinh(\delta D_z)b\cdot c]\cdot[\cosh(\delta D_z)a\cdot d]\\&+\sinh(\delta D_z)[\sinh(\delta D_z)c\cdot a]\cdot[\cosh(\delta D_z)b\cdot d]=0\end{aligned}$$

が成立する. この式を δ で展開して δ の 2 次の項を集めると, 前に示したヤコビの恒等式

$$D_z(D_z a\cdot b)\cdot c+D_z(D_z b\cdot c)\cdot a+D_z(D_z c\cdot a)\cdot b=0 \tag{1.155}$$

が得られる.

次に *D*–operator の拡張[15]を考える. *D*–operator の基本になっている演算は, 変換 $u=a/b$ に対する微分式

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{b}=\frac{D_x a\cdot b}{b^2} \tag{1.156}$$

である. この式から *D*–operator の特性 $a=b$ のとき $D_x a\cdot b=0$ が発生している. したがって, 変換 $u=a/b$ を拡張すると *D*–operator の拡張が自然に行なわれる. ここでは次の変換を考える.

$$u=\frac{a^m}{b^n} \tag{1.157}$$

ここで m, n は必ずしも整数とは限らない.

［注］　微分方程式の厳密解を求める直接法では, 微分方程式の解 u が $u=$

g/f(または $\log(f/g)$, 等々)と変換でき，f と g が有限級数であることを基本的に仮定している．u が上の形のときは，たとえ a, b が有限級数であっても g $(=a^m)$ と $f(=b^n)$ は有限級数になるとは限らない．|

u を x で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a^m}{b^n} = \frac{a^m}{b^n}\frac{ma_x b - nab_x}{ab} \tag{1.158}$$

と整理できるので，新しい演算子 $D_{m,n,x}$

$$D_{m,n,x}{}^j a(x)\cdot b(x) = \left(m\frac{\partial}{\partial x} - n\frac{\partial}{\partial x'}\right)^j a(x)b(x')\bigg|_{x'=x}$$

$$= \frac{\partial^j}{\partial s^j}a(x+ms)b(x-ns)\bigg|_{s=0} \tag{1.159}$$

を導入する．この記号によって

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a^m}{b^n} = \frac{a^m}{b^n}\frac{D_{m,n,x}a(x)\cdot b(x)}{ab} \tag{1.160}$$

となる．

この演算子によって双線形形式に変換されるソリトン方程式として，次の例が知られている．

(i) ギンズバーグ・ランダウ(Ginzburg–Landau)方程式

$$i\Psi_t + p\Psi_{xx} + q|\Psi|^2\Psi = i\gamma\Psi \tag{1.161}$$

は，変換

$$\Psi(x, t) = \exp[i(kx - \Omega t)]G(x, t)/F^n(x, t) \tag{1.162}$$

$(k, \Omega, F$ は実数で，n は条件 $n+n^*=2$ を満たす複素パラメータ)によって，次の双線形形式になる．

$$\begin{aligned}(\Omega - pk^2 - \lambda + iD_{n,t} + 2ikpD_{n,x} + pD_{n,x}{}^2)G\cdot F &= HG\\ [(1/2)p(n+n^2)D_x{}^2 + i\gamma - \lambda]F\cdot F - q|G|^2 &= HF\end{aligned} \tag{1.163}$$

ここで λ と H は，方程式を**分離**(decoupling)するために導入された任意定数と任意関数である．演算子 $D_{n,t}, D_{n,x}, D_x$ は上の記号を使うと，それぞれ $D_{1,n,t}$, $D_{1,n,x}, D_{1,1,t}$ である．野崎と戸次(べっき)は双線形方程式を解いて，ギンズバーグ・ランダウ方程式の孤立波解，ホール解，衝撃波解や 2 つの衝撃波が衝突する様子

を記述する厳密解を導いている[16].

(ii)　変形カウプ・クッパーシュミット方程式(modified Kaup–Kupershmidt equation)

$$v_t-5(v_xv_{3x}+v_{xx}{}^2+v_x{}^3+4vv_xv_{xx}+v^2v_{xxx}-v^4v_x)+v_{5x}=0 \tag{1.164}$$

は，変換

$$v=-3[\log(f/h^2)]_x \tag{1.165}$$

によって，次の双線形形式になる．

$$\begin{aligned}&[D_{2,t}+(1/6)D_{2,x}{}^5]f\cdot h=0\\&D_{2,x}{}^2f\cdot h=0\end{aligned} \tag{1.166}$$

ここで省略記号 $D_{2,x}$ を $D_{1,2,x}$ の代わりに使った．上の式から f を消去すると沢田・小寺方程式(Sawada–Kotera equation)[17]

$$D_x(D_t+D_x{}^5)h\cdot h=0 \tag{1.167}$$

が得られ，h を消去するとカウプ・クッパーシュミット方程式

$$\begin{aligned}&D_x(D_t+(1/6)D_x{}^5)f\cdot f+(15/16)D_x{}^2f\cdot g=0\\&D_x{}^4f\cdot f=fg\end{aligned} \tag{1.168}$$

が得られる．したがって変形カウプ・クッパーシュミット方程式は，沢田・小寺方程式とカウプ・クッパーシュミット方程式の解を結ぶバックルンド変換になっている．これらの式には N–ソリトン解がある．

(iii)　ある非線形偏微分方程式

$$\begin{aligned}&E_t=P\\&P_x=-E(P-N)\\&N_x=2EP\end{aligned} \tag{1.169}$$

は，変換

$$\begin{aligned}&\phi=\log(f/h^2),\qquad \rho=\log(fh^4)\\&E=\phi_x,\qquad P=\phi_{tx},\qquad N=-\rho_{tx}+3\end{aligned} \tag{1.170}$$

によって，双線形形式

$$\begin{aligned}&D_{2,x}(D_{2,x}D_{2,t}-6)f\cdot f=0\\&D_{2,x}{}^2f\cdot h=0\end{aligned} \tag{1.171}$$

になる[15]．この式も N–ソリトン解をもつ．

［注］ 以下のことはソリトン方程式とは直接の関係はないが，D–operator によく似た新しい演算子 $D_{xy}{}^n$–operator を導入すると，解析力学で使うポアソン括弧(Poisson bracket)と微分幾何学で出てくるヘッシアン(Hessian)とが統一的に表現できることになる．❙

$D_x{}^n$–operator の定義とよく似た形式を使って，演算子 $D_{xy}{}^n$–operator を次式で定義する．

$$D_{xy}{}^n f\cdot g \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x'}\right)^n f(x,y)g(x',y')\Big|_{\substack{x'=x\\ y'=y}} \tag{1.172}$$

この演算子は，$n=1$ のときポアソン括弧を与える．

$$\begin{aligned}[f,g]_{p,q} &\equiv \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}\\ &= D_{qp}f\cdot g \end{aligned}\tag{1.173}$$

$n=2$ のときは

$$D_{xy}{}^2 f\cdot g = f_{xx}g_{yy}-2f_{xy}g_{yx}+f_{yy}g_{xx}$$

であるので，ヘッシアン

$$\text{Hessian} \equiv \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix} = \frac{1}{2}D_{xy}{}^2 f\cdot f \tag{1.174}$$

を表わしている．

1–6 非線形偏微分方程式の双線形化

非線形偏微分方程式

$$L(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xx},\cdots)=0 \tag{1.175}$$

を従属変数の変換によって，双線形形式(一般には同次式)に変換する方法について述べる[18]．従属変数の変換にはいろいろなタイプがあるが，代表的な変換の型は有理型，対数型，複対数型などである．

a）　有理型変換

非線形偏微分方程式の解 u を有理関数

$$u = a/b$$

とおく変換を**有理型変換**とよぶ．有理型変換は最も基本的な変換である．非線形項が $u, u_x, \cdots$ の多項式で表わされる微分方程式にこの変換を使うと，a, b に対する同次式(一般に 4 次以上)が得られる．うまい分離法が見つかるとこの同次式は 2 次形式に帰着できる．しかし，2 次形式に分離できない場合でも，同次式のままで摂動計算を使って腕力(数式処理)で厳密解を求めることができる場合が多い．そしてその結果から 2 次形式が見つかることが多い．

有理型変換で同次式に変換するための基本的な公式は

$$\exp\left(\delta\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{a}{b} = \frac{\exp(\delta D_z)a\cdot b}{\cosh(\delta D_z)b\cdot b} \tag{1.176}$$

である．この式はほとんど自明で，記号の定義だけで証明される．

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= a(z+\delta)/b(z+\delta)\\
\text{右辺の分子} &= a(z+\delta)b(z-\delta)\\
\text{右辺の分母} &= (1/2)[b(z+\delta)b(z-\delta)+b(z-\delta)b(z+\delta)]\\
&= b(z+\delta)b(z-\delta)
\end{aligned}$$

したがって 左辺＝右辺 である．パラメータ δ で両辺を展開すると

$$\begin{aligned}
&\left(1+\delta\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\delta^3}{6}\frac{\partial^3}{\partial z^3}+\cdots\right)\frac{a}{b}\\
&= \frac{[1+\delta D_z+(\delta^2/2)D_z{}^2+(\delta^3/6)D_z{}^3+\cdots]a\cdot b}{[1+(\delta^2/2)D_z{}^2+(\delta^4/24)D_z{}^4+\cdots]b\cdot b}\\
&= [a/b+D_z a\cdot b/b^2+(\delta^2/2)D_z{}^2 a\cdot b/b^2+\cdots]\\
&\quad\times[1+(\delta^2/2)D_z{}^2 b\cdot b/b^2+(\delta^4/24)D_z{}^4 b\cdot b/b^2+\cdots]^{-1}
\end{aligned}$$

となる．公式 $(1+X)^{-1}=1-X+X^2-\cdots$ を使って分母を展開し，δ の各ベキを整理すると，$u=a/b$ の微分を D–operator で表わす公式

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{a}{b} = \frac{D_z a\cdot b}{b^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{a}{b} = \frac{D_z{}^2 a\cdot b}{b^2} - \frac{a}{b}\frac{D_z{}^2 b\cdot b}{b^2} \tag{1.177}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3}\frac{a}{b} = \frac{D_z{}^3 a\cdot b}{b^2} - 3\frac{D_z a\cdot b}{b^2}\frac{D_z{}^2 b\cdot b}{b^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が得られる.

有理型変換で双線形形式になる方程式は非常に多いが，代表的なものは次のものである.

（i） KdV 方程式

1–4 節で KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.82}$$

を試行錯誤的に双線形化したが，有理型変換を使うとほとんど自動的に双線形形式が得られる. $u=G/F$ とおいて公式を使うと，KdV 方程式は

$$\frac{D_t G\cdot F}{F^2} + 6\frac{G}{F}\frac{D_x G\cdot F}{F^2} + \frac{D_x{}^3 G\cdot F}{F^2} - 3\frac{D_x G\cdot F}{F^2}\frac{D_x{}^2 F\cdot F}{F^2} = 0$$

となる. F^4 を掛けて整理すると

$$[(D_t + D_x{}^3)G\cdot F]F^2 + 3[D_x G\cdot F][2GF - D_x{}^2 F\cdot F] = 0$$

となる. したがって任意関数 λ を導入すると上式は分離できて，双線形形式

$$\begin{aligned} (D_t + D_x{}^3)G\cdot F &= 3\lambda D_x G\cdot F \\ D_x{}^2 F\cdot F - 2GF &= \lambda F^2 \end{aligned} \tag{1.178}$$

となる. 演算子 $D_t + D_x{}^3$ は KdV 方程式の線形項 $(\partial_t + \partial_x{}^3)u$ に対応している.

ここで，変換 $u=G/F$ に伴う双線形方程式の不定性に注意しておく. 任意関数 h を導入して $F=hF'$，$G=hG'$ と変換しても u は不変である. 一方，前節の D–operator の公式により

$$D_t hG'\cdot hF' = h^2 D_t G'\cdot F'$$

$$D_x{}^2 hF'\cdot hF' = h^2 D_x{}^2 F'\cdot F' + (D_x{}^2 h\cdot h)F'^2$$

$$D_x{}^3 hG'\cdot hF' = h^2 D_x{}^3 G'\cdot F' + 3(D_x{}^2 h\cdot h)(D_x G'\cdot F')$$

である．したがって変換 $F=hF'$, $G=hG'$ により双線形形式は不変である．

$$\begin{aligned}(D_t+D_x{}^3)G'\cdot F' &= 3\lambda' D_x G'\cdot F' \\ D_x{}^2 F'\cdot F'-2G'F' &= \lambda' F'^2\end{aligned} \tag{1.179}$$

ただし方程式を分離するために導入した任意関数 λ が次式のように変換される．

$$\lambda' = \lambda+(D_x{}^2 h\cdot h)/h^2 \tag{1.180}$$

双線形方程式の第 2 式を F^2 で割ると

$$\begin{aligned}\lambda &= (D_x{}^2 F\cdot F)/F^2-2u \\ &= 2[(\log F)_{xx}-u]\end{aligned} \tag{1.181}$$

である．この式によって λ の値は F と u に依存しているが，孤立波解のときには $\lambda=0$ と選べる．ただし周期解(性質 $u(x,t)=u(x-L,t)$ をもつ解．L は周期)では λ は重要になる．

(ii)　変形 KdV 方程式

KdV 方程式の非線形項 uu_x を u^2u_x と置き換えた方程式は，変形 KdV 方程式(1.50)の特別の場合($\alpha=0$, $\beta=6$)である．

$$w_t+6w^2w_x+w_{xxx} = 0 \tag{1.182}$$

この方程式で変換 $w=G/F$ を行なうと

$$[(D_t+D_x{}^3)G\cdot F]F^2+3[D_xG\cdot F][2G^2-D_x{}^2F\cdot F] = 0$$

となる．任意関数 λ を導入すると，以下の双線形形式が得られる．

$$\begin{aligned}(D_t+D_x{}^3)G\cdot F &= 3\lambda D_xG\cdot F \\ D_x{}^2F\cdot F-2G^2 &= \lambda F^2\end{aligned} \tag{1.183}$$

この場合でも演算子 $D_t+D_x{}^3$ は変形 KdV 方程式の線形演算子 $\partial_t+\partial_{xxx}$ に対応している．

(iii)　非線形シュレーディンガー(nonlinear Schrödinger)方程式

$$i\Psi_t+\Psi_{xx}+2c|\Psi|^2\Psi = 0 \tag{1.184}$$

ここで $c=\pm 1$．変換

$$\Psi = G/F \qquad (\text{ただし } F \text{ は実数})$$

によって

$$[(iD_t+D_x^2)G\cdot F]F^2-GF[D_x^2F\cdot F-2c|G|^2]=0$$

を得る．したがって双線形形式は

$$\begin{aligned}(iD_t+D_x^2)G\cdot F &= \lambda GF\\ D_x^2F\cdot F-2c|G|^2 &= \lambda F^2\end{aligned} \tag{1.185}$$

である．第 2 式から

$$|\Psi|^2=[(D_x^2F\cdot F)/F^2-\lambda]/(2c) \tag{1.186}$$

となるので，$|x|=\infty$ における $|\Psi|^2$ と関数 F の値および c の符号によって λ の値は違ってくる．$\lambda=0$ の場合，Ψ を**包絡線ソリトン**(envelope soliton) といい，$\lambda=1$ の場合を**エンヴェロープホール**(envelope hole) という．

b) 対数型変換

従属変数 u をある関数 f の対数を使って

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.187}$$

と置く変換を**対数型変換**とよぶ．この変換での基本的公式は次の式である．

$$2\cosh\left(\delta\frac{\partial}{\partial z}\right)\log f(z)=\log\left[\cosh(\delta D_z)f(z)\cdot f(z)\right] \tag{1.188}$$

証明は前と同様に式の定義を使うだけである．

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \log f(z+\delta)+\log f(z-\delta)\\ &= \log\left[f(z+\delta)f(z-\delta)\right]\end{aligned}$$

これは右辺に等しい．この公式を δ で展開して，δ の同じベキを比較すると

$$2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log f=\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2} \tag{1.189a}$$

$$2\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\log f=\frac{D_xD_tf\cdot f}{f^2} \tag{1.189b}$$

$$2\frac{\partial^4}{\partial x^4}\log f=\frac{D_x^4f\cdot f}{f^2}-3\left(\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2}\right)^2 \tag{1.189c}$$

$$2\frac{\partial^6}{\partial x^6}\log f=\frac{D_x^6f\cdot f}{f^2}-15\frac{D_x^4f\cdot f}{f^2}\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2}+30\left(\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2}\right)^3 \tag{1.189d}$$

....

等の諸公式が得られる．

この変換で双線形形式になる方程式の代表例は，何度も出てきた KdV 方程式

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.82}$$

である．この式は，ポテンシャル w を

$$u=w_x \tag{1.190}$$

で導入すると，1 回積分できて

$$w_t+3{w_x}^2+w_{xxx}=c \qquad (c \text{ は積分定数}) \tag{1.191}$$

となる．ここで

$$w=2(\log f)_x \tag{1.192a}$$

と変換する．これは u を

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.192b}$$

のように対数型変換することに等しい．上の公式より

$$\frac{D_xD_tf\cdot f}{f^2}+3\left(\frac{{D_x}^2f\cdot f}{f^2}\right)^2+\frac{{D_x}^4f\cdot f}{f^2}-3\left(\frac{{D_x}^2f\cdot f}{f^2}\right)^2=c \tag{1.193}$$

となる．f について 4 次の項 ${w_x}^2$ が打ち消しあって，自動的に双線形形式[10)]

$$D_x(D_t+{D_x}^3)f\cdot f=cf^2 \tag{1.194}$$

が得られる．この式で演算子 $D_t+{D_x}^3$ は，KdV 方程式の線形演算子 $\partial_t+{\partial_x}^3$ に対応している．

c)　複対数型変換

従属変数を，関数 a/b の対数を使って

$$\phi=\log(a/b) \tag{1.195}$$

とおく変換を**複対数型変換**とよぶ．この変換は別の従属変数 ρ と対になっていることが多い．ρ は

$$\rho=\log(ab) \tag{1.196}$$

と変換される．この変換に使われる基本的公式は

$$2\sinh\left(\delta\frac{\partial}{\partial x}\right)\log(a/b)$$
$$=\log[\exp(\delta D_x)a\cdot b]-\log[\exp(-\delta D_x)a\cdot b] \qquad (1.197a)$$
$$2\cosh\left(\delta\frac{\partial}{\partial x}\right)\log(a/b)$$
$$=\log[\cosh(\delta D_x)a\cdot a]-\log[\cosh(\delta D_x)b\cdot b] \qquad (1.197b)$$
$$2\cosh\left(\delta\frac{\partial}{\partial x}\right)\log(ab)$$
$$=\log[\exp(\delta D_x)a\cdot b]+\log[\exp(-\delta D_x)a\cdot b] \qquad (1.197c)$$

である．証明は次の通りになる．第1式では

$$\text{左辺}=\log[a(x+\delta)/b(x+\delta)]-\log[a(x-\delta)/b(x-\delta)]$$
$$=\log[a(x+\delta)b(x-\delta)]-\log[a(x-\delta)b(x+\delta)]$$
$$=\text{右辺}$$

第2式では

$$\text{左辺}=\log[a(x+\delta)/b(x+\delta)]+\log[a(x-\delta)/b(x-\delta)]$$
$$=\log[a(x+\delta)a(x-\delta)]-\log[b(x+\delta)b(x-\delta)]$$
$$=\text{右辺}$$

第3式では

$$\text{左辺}=\log[a(x+\delta)b(x+\delta)]+\log[a(x-\delta)b(x-\delta)]$$
$$=\log[a(x+\delta)b(x-\delta)]+\log[a(x-\delta)b(x+\delta)]$$
$$=\text{右辺}$$

これらの式を δ のベキに展開して

$$\frac{\partial}{\partial x}\log(a/b)=\frac{D_x a\cdot b}{ab} \qquad (1.198a)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(a/b)=\frac{D_x^{\,2}a\cdot a}{2a^2}-\frac{D_x^{\,2}b\cdot b}{2b^2} \qquad (1.198b)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(ab)=\frac{D_x^{\,2}a\cdot b}{ab}-\left(\frac{D_x a\cdot b}{ab}\right)^2 \qquad (1.198c)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\log(a/b) = \frac{D_x{}^3 a\cdot b}{ab} - 3\frac{D_x{}^2 a\cdot b}{ab}\frac{D_x a\cdot b}{ab} + 2\left(\frac{D_x a\cdot b}{ab}\right)^3 \quad (1.198\text{d})$$

……………

などが得られる．

複対数変換で双線形形式に変換される非線形偏微分方程式の代表例は変形 KdV 方程式[19]とサイン・ゴルドン (sine-Gordon) 方程式[20]である．

（i）　変形 KdV 方程式

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \qquad (1.182')$$

は，$v = i\phi_x$ とおくと，x で積分できる．

$$\phi_t - 2\phi_x{}^3 + \phi_{xxx} = 0 \qquad (1.199)$$

ここで ϕ に複対数変換を行なうと

$$\phi = \log(a/b) \qquad (1.200)$$

上の公式から

$$\frac{D_t a\cdot b}{ab} - 2\left(\frac{D_x a\cdot b}{ab}\right)^3 + \frac{D_x{}^3 a\cdot b}{ab} - 3\left(\frac{D_x{}^2 a\cdot b}{ab}\right)\left(\frac{D_x a\cdot b}{ab}\right) + 2\left(\frac{D_x a\cdot b}{ab}\right)^3 = 0$$

$$(1.201)$$

となる．ここでも非線形項 $\phi_x{}^3$ が自動的に消える．双線形形式は

$$\begin{aligned}(D_t + D_x{}^3)a\cdot b &= 3\lambda D_x a\cdot b \\ D_x{}^2 a\cdot b &= \lambda ab\end{aligned} \qquad (1.202)$$

である．孤立波解のときには λ は 0 に選べる．

（ii）　サイン・ゴルドン方程式

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin\phi \qquad (1.203)$$

に複対数変換

$$\phi = 2i\log(f/f^*) \qquad (1.204)$$

を使う．ここで f^* は f の複素共役である．この式から $\exp(i\phi) = (f^*/f)^2$ であるから，

$$\sin\phi = \frac{1}{2i}\left(\frac{f^{*2}}{f^2} - \frac{f^2}{f^{*2}}\right) \qquad (1.205)$$

となる．微分則

$$\phi_{xx} = i\left(\frac{D_x{}^2 f\cdot f}{f^2} - \frac{D_x{}^2 f^*\cdot f^*}{f^{*2}}\right)$$
$$\phi_{tt} = i\left(\frac{D_t{}^2 f\cdot f}{f^2} - \frac{D_t{}^2 f^*\cdot f^*}{f^{*2}}\right) \tag{1.206}$$

を(1.203)式に代入してまとめると

$$[i(D_x{}^2 - D_t{}^2)f\cdot f - (f^{*2} - f^2)/(2i)]f^{*2}$$
$$-[i(D_x{}^2 - D_t{}^2)f^*\cdot f^* - (f^2 - f^{*2})/(2i)]f^2 = 0$$

となる．したがって双線形形式は次式とその式の複素共役になる．

$$(D_x{}^2 - D_t{}^2)f\cdot f - (f^2 - f^{*2})/2 = \lambda f^2 \tag{1.207}$$

ここで λ は実数で，孤立波解のときには 0 にできる．

座標変換

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial y} \tag{1.208}$$

によってサイン・ゴルドン方程式

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin\phi$$

は

$$\phi_{xy} = \sin\phi \tag{1.209}$$

に変換される．この方程式は複対数変換

$$\phi = 2i\log(f/f^*) \tag{1.210}$$

によって

$$D_x D_y f\cdot f - (f^2 - f^{*2})/2 = \lambda f^2 \tag{1.211}$$

である．ここで λ は実数で，孤立波解のときには 0 にできる．

1–7 双線形方程式の解法

KdV 方程式

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.82}$$

は変換

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.187}$$

によって双線形方程式

$$D_x(D_t+D_x{}^3)f\cdot f=cf^2 \tag{1.194}$$

に変換されることを前節で示したが，この方程式の摂動計算による厳密解法について述べる[18]．孤立波解を求めるので c は 0 に選ぶ．

摂動計算というのは，f を小さなパラメータ ε について展開し

$$f=1+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^3 f_3+\cdots \tag{1.212}$$

ε^n の係数 f_n を n の小さい方から順に解いていく方法である．普通の摂動法では ε による展開は無限に続くので，適当なところで展開を切断することになる．したがって解は近似的な意味しかもたない．これに対して双線形方程式の摂動法では，f_1 の選び方（f_1 は線形微分方程式の解である）によって無限級数が途中で切れて有限になり，解は厳密解になる場合がある．

f の展開式を双線形方程式に代入して ε のベキで整理すると

$$\begin{aligned}
\varepsilon\ &:\ D_x(D_t+D_x{}^3)(f_1\cdot 1+1\cdot f_1)=0\\
\varepsilon^2 &:\ D_x(D_t+D_x{}^3)(f_2\cdot 1+f_1\cdot f_1+1\cdot f_2)=0\\
\varepsilon^3 &:\ D_x(D_t+D_x{}^3)(f_3\cdot 1+f_2\cdot f_1+f_1\cdot f_2+1\cdot f_3)=0\\
\varepsilon^4 &:\ D_x(D_t+D_x{}^3)(f_4\cdot 1+f_3\cdot f_1+f_2\cdot f_2+f_1\cdot f_3+1\cdot f_4)=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

となる．第1近似の式は f_1 に対する線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f_1=0 \tag{1.213}$$

になる．孤立波（1–ソリトン）に対応する解は

$$f_1=\exp\eta_1 \tag{1.107}$$

$$\eta_1=P_1x+\Omega_1t+\text{const.}$$

$$\Omega_1+P_1{}^3=0$$

であることは1–4節の初めに説明したが，ここでは2–ソリトン解（2個の孤立波の衝突を示す解）を求めることから始めよう．

線形微分方程式の解 f_1 は 2–ソリトン解に対応して，

$$f_1 = \exp\eta_1 + \exp\eta_2 \qquad (1.214)$$
$$\eta_i = P_i x + \Omega_i t + \text{const.}$$
$$\Omega_i + P_i^{\,3} = 0 \qquad (i=1,2)$$

を選ぶ．$\Omega_i + P_i^{\,3} = 0$ を**非線形の分散関係**とよぶ．これを第 2 近似の式に代入すると

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f_2 = -D_x(D_t+D_x^{\,3})f_1\cdot f_1 \qquad (1.215)$$

を得る．右辺に $f_1 = \exp\eta_1 + \exp\eta_2$ を代入すると D–operator の性質(1. 104c) によって，

$$\begin{aligned} D_x(D_t+D_x^{\,3})f_1\cdot f_1 &= D_x(D_t+D_x^{\,3})(\exp\eta_1+\exp\eta_2)\cdot(\exp\eta_1+\exp\eta_2) \\ &= 2D_x(D_t+D_x^{\,3})\exp\eta_1\cdot\exp\eta_2 \\ &= 2(P_1-P_2)[\Omega_1-\Omega_2+(P_1-P_2)^3]\exp(\eta_1+\eta_2) \end{aligned}$$

となる．したがって第 2 近似の線形微分方程式の解 f_2 として

$$f_2 = a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \qquad (1.216)$$

を選ぶ．係数 a_{12} は公式(1. 104c) によって

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\frac{2(P_1-P_2)[\Omega_1-\Omega_2+(P_1-P_2)^3]}{2(P_1+P_2)[\Omega_1+\Omega_2+(P_1+P_2)^3]} \\ &= \frac{(P_1-P_2)^2}{(P_1+P_2)^2} \end{aligned} \qquad (1.217)$$

である．

これらの f_1 と f_2 を f_3 に対する線形微分方程式

$$D_x(D_t+D_x^{\,3})(f_3\cdot 1+f_2\cdot f_1+f_1\cdot f_2+1\cdot f_3) = 0 \qquad (1.218)$$

に代入すると，非同次項は

$$\begin{aligned} &D_x(D_t+D_x^{\,3})(f_2\cdot f_1+f_1\cdot f_2) \\ &\quad = 2D_x(D_t+D_x^{\,3})\exp(\eta_1+\eta_2)\cdot(\exp\eta_1+\exp\eta_2) \\ &\quad = 2P_2(\Omega_2+P_2^{\,3})\exp(2\eta_1+\eta_2)+2P_1(\Omega_1+P_1^{\,3})\exp(\eta_1+2\eta_2) \end{aligned}$$

であるが，非線形の分散関係 $\Omega_i + P_i^{\,3} = 0$ $(i=1,2)$ によって 0 になる．したが

って f_3 は 0 と選べる．f_3 が 0 であるので，第 4 近似の線形微分方程式は

$$D_x(D_t+D_x{}^3)(f_4\cdot 1+f_2\cdot f_2+1\cdot f_4) = 0 \tag{1.219}$$

となるが，この場合も非同次項が消え，

$$D_x(D_t+D_x{}^3)f_2\cdot f_2 = 0 \tag{1.220}$$

となるので，f_4 も 0 に選べる．これらの結果を f の摂動展開に代入すると

$$f = 1+\varepsilon(\exp\eta_1+\exp\eta_2)+\varepsilon^2 a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \tag{1.221a}$$

となる．ε は摂動展開の小さなパラメータであったが，

$$\eta_i = P_i x+\Omega_i t+\text{const.} \tag{1.221b}$$

であるので，ε は const. のなかに繰り込める．したがって

$$f = 1+\exp\eta_1+\exp\eta_2+a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \tag{1.222}$$

が KdV 双線形方程式の 2–ソリトン解を与える．したがって KdV 方程式の 2–ソリトン解 u は，この f によって

$$u = 2(\log f)_{xx} \tag{1.223}$$

と表わされる．この結果は 2 つのソリトンが衝突によって壊れないことを示している．図 1–7 にある差分スキームによって計算したソリトンの衝突の様子を図示する．

［注］ f の式で a_{12} はソリトンの衝突によって生じる位相（ソリトンの位置）のずれを与える大事な量である．数学的には a_{12} の構造によって双線形方程式に作用する群の構造が決まってくる[12)]．

$$a_{12} = -\frac{(P_1-P_2)[\Omega_1-\Omega_2+(P_1-P_2)^3]}{(P_1+P_2)[\Omega_1+\Omega_2+(P_1+P_2)^3]} \tag{1.224}$$

であるが，a_{12} の構造は KdV 双線形方程式の構造

$$D_x(D_t+D_x{}^3)f\cdot f = 0 \tag{1.225}$$

をそのまま反映している．❙

次に F を $D_t, D_x, D_y, \cdots$ の一般的な多項式として，双線形方程式

$$F(D_t, D_x, D_y, \cdots)f\cdot f = 0 \tag{1.226}$$

を考える．これを **KdV 型双線形方程式**と呼ぶことにする．KdV 型双線形方程式の特徴は，ただ 1 つの従属変数 f をもつことである．

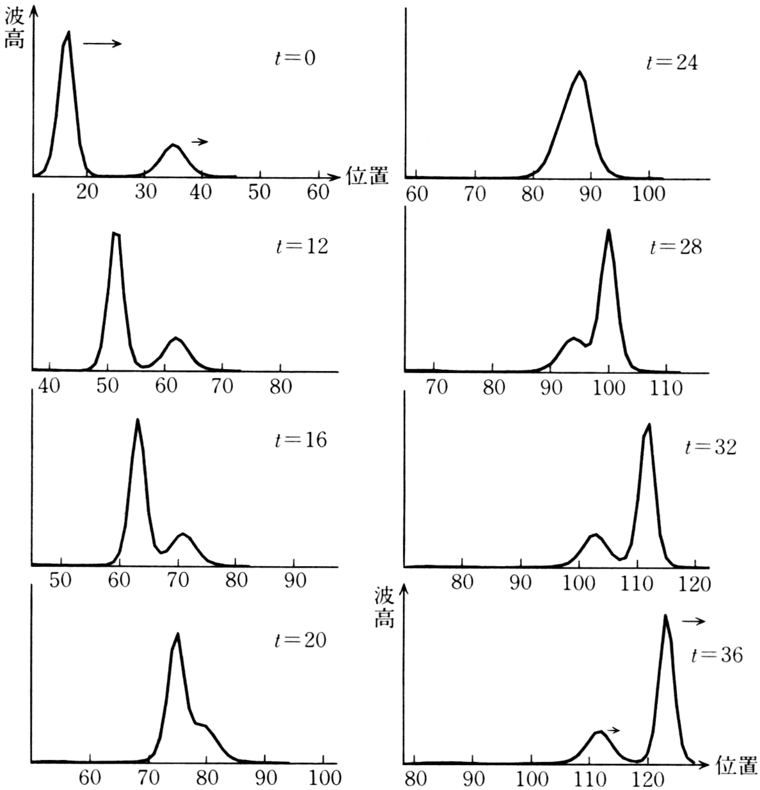


図 1-7 時間・空間を差分化したソリトン方程式 $u_n^{t+1}-u_n^{t}=\delta\{u_{n-1}^{t+1}u_n^{t}-u_n^{t+1}u_{n+1}^{t}\}$ $(n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty$. δ は差分間隔) を利用してソリトンの衝突を計算した結果である. $t=0$ で小さなソリトンの後から大きなソリトンが追突しようとしている. $t=24$ で両者は重なり, $t=36$ で元の姿を回復している. ソリトンの形が滑らかでないのは, ソリトンがとびとびの時空を動いているからである.

ここでベクトル記号

$$\boldsymbol{D}=\{D_t, D_x, D_y, \cdots\} \tag{1.227}$$

を導入して, 上式を

$$F(\boldsymbol{D})f\cdot f=0 \tag{1.228}$$

と略記する. そして F は次の条件をみたすものとする.

(i)　$F(-\boldsymbol{D}) = F(\boldsymbol{D})$　(1.229a)

(ii)　$F(\boldsymbol{0}) = 0$　(1.229b)

条件(i)は本質的な条件ではない．D の多項式 F_{odd} が奇数次であれば，自動的に $F_{\text{odd}}(\boldsymbol{D})f\cdot f=0$ となる．

条件(ii)は孤立波(ソリトン)解を求めるために必要である．摂動計算において $f=1+\varepsilon f_1+\cdots$ と展開したが，この条件がないと，ε の 0 次の項が

$$F(\boldsymbol{0})1\cdot 1 \neq 0$$

となって，解にならないからである．

［注］　この条件(ii)が成り立たない場合，解は準周期解になる．この場合 KdV 双線形方程式は 2 個の準周期解をもつことが中村明[21]によって示されている．

KdV 双線形方程式の摂動計算と全く同じやり方で KdV 型双線形方程式にたいして 2–ソリトン解が次のように構成できる[18]．

多項式 F にたいして

$$\begin{aligned} &F(D_t, D_x, \cdots)\exp\eta_1\cdot\exp\eta_2 \\ &\quad= \frac{F(\omega_1-\omega_2, P_1-P_2, \cdots)}{F(\omega_1+\omega_2, P_1+P_2, \cdots)}F(\partial_t, \partial_x, \cdots)\exp(\eta_1+\eta_2) \end{aligned} \tag{1.230}$$

が成り立つことはすでに述べた．この式も次のように略記する．

$$F(\boldsymbol{D})\exp\eta_1\cdot\exp\eta_2 = \frac{F(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)}{F(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)}F(\boldsymbol{\partial})\exp(\eta_1+\eta_2) \tag{1.230$'$}$$

ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_1 \pm \boldsymbol{P}_2 &= \{\omega_1\pm\omega_2, P_1\pm P_2, \cdots\} \\ \boldsymbol{\partial} &= \{\partial_t, \partial_x, \cdots\} \end{aligned}$$

である．❙

摂動計算によって KdV 型双線形方程式

$$F(\boldsymbol{D})f\cdot f = 0 \tag{1.231}$$

の 2–ソリトン解が次の形で求まる．

$$f = 1+\exp\eta_1+\exp\eta_2+a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \tag{1.232}$$

ここで

$$\eta_i = P_i x + \Omega_i t + Q_i y + \cdots + \text{const.} \qquad (i=1,2) \qquad (1.233)$$

この式もベクトル記号

$$\boldsymbol{P}_i = \{P_i, \Omega_i, Q_i, \cdots\}$$
$$\boldsymbol{x}_i = \{x, t, y, \cdots\}$$

によって

$$\eta_i = \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{x}_i + \text{const.} \qquad (1.234)$$

となる．非線形の分散関係は

$$F(\boldsymbol{P}_i) = 0 \qquad (i=1,2) \qquad (1.235)$$

であり，位相のずれ a_{12} は

$$a_{12} = -\frac{F(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2)}{F(\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2)} \qquad (1.236)$$

である．

［注 1］ KdV 型双線形方程式は，次式のように拡張しても 2–ソリトン解をもつ．

$$F(\boldsymbol{D})[f \cdot f + (L_1 f) \cdot (L_2 f)] = 0 \qquad (1.237)$$

ここで L_i $(i=1,2)$ は線形微分演算子

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i(\boldsymbol{\partial}) \\ L_i(\boldsymbol{0}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.238)$$

$F(\boldsymbol{D})$ は前と同じ条件

（i） $F(-\boldsymbol{D}) = F(\boldsymbol{D})$ (1.229a)

（ii） $F(\boldsymbol{0}) = 0$ (1.229b)

を満たす．

2–ソリトン解は KdV 型双線形方程式と同じ形

$$f = 1 + \exp\eta_1 + \exp\eta_2 + a_{12}\exp(\eta_1 + \eta_2) \qquad (1.239)$$
$$\eta_i = P_i x + \Omega_i t + Q_i y + \cdots + \text{const.} \qquad (i=1,2)$$
$$F(\boldsymbol{P}_i) = 0 \qquad (i=1,2)$$

をしている．違うのは位相のずれ a_{12} のみである．

$$a_{12} = -\frac{F(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)}{F(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)}(1+\gamma)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}[L_1(\boldsymbol{P}_1)L_2(\boldsymbol{P}_2)+L_1(\boldsymbol{P}_2)L_2(\boldsymbol{P}_1)] \quad (1.240)$$

［注 2］ 3–ソリトン解をもつ 3 次形式の方程式について簡単に考察しておく．KdV 型双線形方程式

$$F(\boldsymbol{D})f\cdot f = 0 \quad (1.241)$$

は 2–ソリトン解

$$f = 1+\exp\eta_1+\exp\eta_2+a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \quad (1.242)$$

をもつが，この $F(\boldsymbol{D})$ を用いて次のような 3 次形式を考える．

$$F(\boldsymbol{D})[F(\boldsymbol{\partial})f]\cdot[F(\boldsymbol{D})f\cdot f] = 0 \quad (1.243)$$

この 3 次形式には上の解をそのまま拡張した 3–ソリトン解

$$\begin{aligned} f = {} & 1+\exp\eta_1+\exp\eta_2+\exp\eta_3+a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \\ & +a_{13}\exp(\eta_1+\eta_3)+a_{23}\exp(\eta_2+\eta_3) \\ & +a_{12}a_{13}a_{23}\exp(\eta_1+\eta_2+\eta_3) \end{aligned} \quad (1.244)$$

がある．これは双線形形式と 3 次形式の本質的な違いを示唆している． ▎

さて KdV 方程式の双線形形式

$$D_x(D_t+D_x{}^3)f\cdot f = 0 \quad (1.225)$$

に戻って，3–ソリトン解を求める．f_1 として次のものを選ぶ．

$$f_1 = \exp\eta_1+\exp\eta_2+\exp\eta_3 \quad (1.245)$$

摂動計算の結果（手計算では面倒だが，数式処理を使うと簡単である），

$$\begin{aligned} f = {} & 1+\exp\eta_1+\exp\eta_2+\exp\eta_3+a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \\ & +a_{23}\exp(\eta_2+\eta_3)+a_{13}\exp(\eta_1+\eta_3) \\ & +a_{123}\exp(\eta_1+\eta_2+\eta_3) \end{aligned} \quad (1.246)$$

$$\eta_i = P_i x+\Omega_i t+\text{const.}$$

$$\Omega_i+P_i{}^3 = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

$$a_{ij} = \frac{(P_i-P_j)^2}{(P_i+P_j)^2} \qquad (i,j=1,2,3)$$

$$a_{123} = a_{12}a_{13}a_{23}$$

となる．

このfを次のように表現する．まず a_{ij} を exp の肩にのせる．

$$a_{ij} = \exp A_{ij}$$

$$f = \sum \exp\left[\sum_{i=1}^{3} \mu_i\eta_i + \sum_{i<j}^{(3)} A_{ij}\mu_i\mu_j\right]$$

ここで $\sum$ は $\mu_1=0, 1$，$\mu_2=0, 1$，$\mu_3=0, 1$ のすべての組合せについての和を意味する．例えば，組 $(\mu_1=1, \mu_2=0, \mu_3=0)$ は $\exp \eta_1$ を与え，組 $(\mu_1=1, \mu_2=1, \mu_3=0)$ は $a_{12} \exp(\eta_1+\eta_2)$ を与え，組 $(\mu_1=1, \mu_2=1, \mu_3=1)$ は $a_{123} \exp(\eta_1+\eta_2+\eta_3)$ を与える．

$\sum\limits_{i<j}^{(3)}$ は 3 個の中から（条件 $i<j$ のもとで）選んだすべてのペアについての和を意味する．したがって

$$\begin{aligned} f = {} & 1+\exp \eta_1+\exp \eta_2+\exp \eta_3+\exp(A_{12}+\eta_1+\eta_2) \\ & +\exp(A_{23}+\eta_2+\eta_3)+\exp(A_{13}+\eta_1+\eta_3) \\ & +\exp(A_{12}+A_{23}+A_{13}+\eta_1+\eta_2+\eta_3) \end{aligned}$$

である．

この記号を使うと一般の N–ソリトン解は

$$f = \sum \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i\eta_i + \sum_{i<j}^{(N)} A_{ij}\mu_i\mu_j\right] \tag{1.247}$$

と表現される．ここで $\sum$ は $\mu_1=0, 1$，$\mu_2=0, 1$，…，$\mu_N=0, 1$ のすべての組合せについての和を，$\sum\limits_{i<j}^{(N)}$ は N 個の中から（条件 $i<j$ のもとで）選んだすべてのペアについての和を意味する．

この N–ソリトン解 f の形は KdV 型双線形方程式

$$F(\boldsymbol{D})f\cdot f = 0 \tag{1.241}$$

の解全体に共通している．ここで

$$\boldsymbol{P}_i = \{P_i, \Omega_i, Q_i, \cdots\}$$

$$\boldsymbol{x}_i = \{x, t, y, \cdots\}$$

とすると，$i, j=1, 2, 3, \cdots, N$ について

$$\eta_i = \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{x}_i + \text{const.}$$
$$F(\boldsymbol{P}_i) = 0 \tag{1.248}$$

であり，位相のずれ a_{ij} は

$$a_{ij} = -\frac{F(\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{P}_j)}{F(\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_j)} \tag{1.249}$$

である．ただし，関数 $F(\boldsymbol{D})$ は任意ではなく，つぎの条件式 (Hirota condition)[18),22)] を満足しなければならない．

$$\sum F\left(\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \boldsymbol{P}_i\right) \prod_{i<j}^{(N)} F(\sigma_i \boldsymbol{P}_i - \sigma_j \boldsymbol{P}_j) \sigma_i \sigma_j = 0 \tag{1.250}$$

ここで $\sum$ は $\sigma_1 = \pm 1, \sigma_2 = \pm 1, \cdots, \sigma_N = \pm 1$ のすべての組合せについての和を意味する．

［注］ この条件式は，N–ソリトン解 f を KdV 型双線形方程式に代入して整理すると得られるが，この式を導き，証明するのはそう簡単ではない．次章で示すように，双線形方程式の構造が明らかになると，全く別の方法で一般の N に対して解であることが簡単に示せるので，上の条件を任意の N で証明する必要はない．しかし，かつてはこの条件を満たす関数 F を探すことが直接法によるソリトン方程式発見の唯一の手段であった．これは経験則であるが，3–ソリトン解があって 4–ソリトン解をもたない双線形方程式はないと思われる (例外として知られているのは，$F(\boldsymbol{D}) = D_1 D_2 D_3 D_4$ の場合である：Hietarinta 氏からの私信)．Hietarinta 氏は 3–ソリトン解に対する条件式を数式処理によってチェックし，新しいソリトン方程式 (の候補) を続々と発見している[22)]．❙

双線形方程式は次節の公式によって通常の非線形偏微分方程式に変換される．以下に，上の条件式を任意の N でみたす KdV 型双線形方程式と従属変数の変換式および通常の非線形偏微分方程式 (ソリトン方程式) を列記する[18)]．ただし偏差分方程式は省略する．

（i） KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.251a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.251b}$$

$$D_x(D_t+D_x{}^3)f\cdot f=0 \tag{1.251c}$$

(ii-a)　ラックス(Lax)の5階KdV方程式

$$u_t+10\left(u^3+\frac{1}{2}u_x{}^2+uu_{xx}\right)_x+u_{xxxxx}=0 \tag{1.252a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.252b}$$

$$\left[D_x(D_t+D_x{}^5)-\frac{5}{3}D_s(D_s+D_x{}^3)\right]f\cdot f=0 \tag{1.252c}$$

ただし f は，補助変数 s による次の双線形方程式

$$D_x(D_s+D_x{}^3)f\cdot f=0 \tag{1.253}$$

も同時に満たしている．

(ii-b)　沢田・小寺方程式

$$u_t+15(u^3+uu_{xx})_x+u_{xxxxx}=0 \tag{1.254a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.254b}$$

$$D_x(D_t+D_x{}^5)f\cdot f=0 \tag{1.254c}$$

(iii)　ブシネ(Boussinesq)方程式

$$u_{tt}-u_{xx}-3(u^2)_{xx}-u_{xxxx}=0 \tag{1.255a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.255b}$$

$$(D_t{}^2-D_x{}^2-D_x{}^4)f\cdot f=0 \tag{1.255c}$$

(iv)　カドムツェフ・ペトヴィアシヴィリ(Kadomtsev-Petviashvili)方程式(KP方程式と略記)

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x\pm u_{yy}=0 \tag{1.256a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.256b}$$

$$[D_x(D_t+D_x{}^3)\pm D_y{}^2]f\cdot f=0 \tag{1.256c}$$

(v)　浅水波のモデル方程式

(a)

$$u_t-u_{xxt}-4uu_t+2u_x\int_x^\infty u_t dx'+u_x=0 \tag{1.257a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.257b}$$

$$\left[D_x(D_t-D_tD_x{}^2+D_x)+\frac{1}{3}D_t(D_s+D_x{}^3)\right]f\cdot f=0 \tag{1.257c}$$

ただし f は，補助変数 s による次の双線形方程式

$$D_x(D_s+D_x{}^3)f\cdot f=0 \tag{1.258}$$

も同時に満たしている．

(b)

$$u_t-u_{xxt}-3uu_t+3u_x\int_x^\infty u_t dx'+u_x=0 \tag{1.259a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{1.259b}$$

$$D_x(D_t-D_tD_x{}^2+D_x)f\cdot f=0 \tag{1.259c}$$

(vi)　戸田格子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log[1+V_n(t)]=V_{n+1}(t)-2V_n(t)+V_{n-1}(t) \tag{1.260a}$$

$$\begin{aligned}V_n(t)&=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log f_n(t)\\&=\frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)}{f_n(t)^2}-1\end{aligned} \tag{1.260b}$$

$$\left[D_t{}^2-4\sinh^2\left(\frac{1}{2}D_n\right)\right]f_n\cdot f_n=0 \tag{1.260c}$$

1-8　双線形形式から非線形偏微分方程式への変換公式

ある双線形形式が N-ソリトン解があるための条件式(Hirota condition)を満たしていることが判明したり，特異な双線形形式が発見されたりすると，その式を通常の非線形偏微分方程式に変換したくなる．双線形形式から変換される非線形偏微分方程式はただ1つではない．従属変数の変換の型によって全く違う形の微分方程式に変換される場合もある．

以下の公式は双線形形式から微分方程式への変換公式である[18]．

a）　有理関数型変換

$$\exp(\delta D_x)a\cdot b = \{\exp[2\cosh(\delta\partial_x)\log b]\}[\exp(\delta\partial_x)(a/b)] \tag{1.261}$$

この式も証明は簡単で，以下のようになる．

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \exp[\log b(x+\delta)b(x-\delta)]a(x+\delta)/b(x+\delta)\\ &= a(x+\delta)b(x-\delta)\\ &= \text{左辺}\end{aligned}$$

従属変数 Ψ と u を

$$\Psi = a/b, \qquad u = 2(\log b)_{xx}$$

と導入し，上式を δ で展開すると以下の式を得る．

$$(D_x a\cdot b)/b^2 = \Psi_x \tag{1.262a}$$

$$(D_x{}^2 a\cdot b)/b^2 = \Psi_{xx}+u\Psi \tag{1.262b}$$

$$(D_x{}^3 a\cdot b)/b^2 = \Psi_{xxx}+3u\Psi_x \tag{1.262c}$$

$$(D_x{}^4 a\cdot b)/b^2 = \Psi_{xxxx}+6u\Psi_{xx}+(u_{xx}+3u^2)\Psi \tag{1.262d}$$

$$(D_x{}^5 a\cdot b)/b^2 = \Psi_{xxxxx}+10u\Psi_{xxx}+5(u_{xx}+3u^2)\Psi_x \tag{1.262e}$$

b）　対数型変換

$$\cosh(\delta D_x)f\cdot f = \exp[2\cosh(\delta\partial_x)\log f] \tag{1.263}$$

従属変数 u を

$$u = 2(\log f)_{xx} \tag{1.264}$$

と定義し，上式を δ で展開して以下の式を得る．

$$(D_x{}^2 f\cdot f)/f^2 = u \tag{1.265a}$$

$$(D_x{}^4 f\cdot f)/f^2 = u_{xx}+3u^2 \tag{1.265b}$$

$$(D_x{}^6 f\cdot f)/f^2 = u_{xxxx}+15uu_{xx}+15u^3 \tag{1.265c}$$

…………

c）　複対数型変換

$$\exp(\delta D_x)a\cdot b = \exp[\sinh(\delta\partial_x)\log(a/b)+\cosh(\delta\partial_x)\log(ab)] \tag{1.266}$$

従属変数 ϕ と ρ を

$$\phi = \log(a/b), \qquad \rho = \log(ab) \tag{1.267}$$

と定義し，上式をδで展開して以下の式を得る．

$$(D_x a\cdot b)/ab=\phi_x \tag{1.268a}$$

$$(D_x{}^2 a\cdot b)/ab=\rho_{xx}+\phi_x{}^2 \tag{1.268b}$$

$$(D_x{}^3 a\cdot b)/ab=\phi_{xxx}+3\phi_x\rho_{xx}+\phi_x{}^3 \tag{1.268c}$$

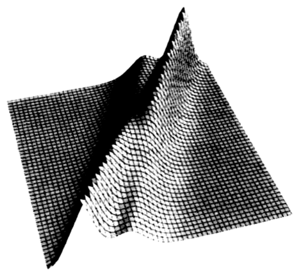
$$(D_x{}^4 a\cdot b)/ab=\rho_{xxxx}+4\phi_x\rho_{xxx}+3\rho_{xx}{}^2+6\phi_x{}^2\rho_{xx}+\phi_x{}^4 \tag{1.268d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

2

行列式とパフィアン

追　突



2-0　はじめに

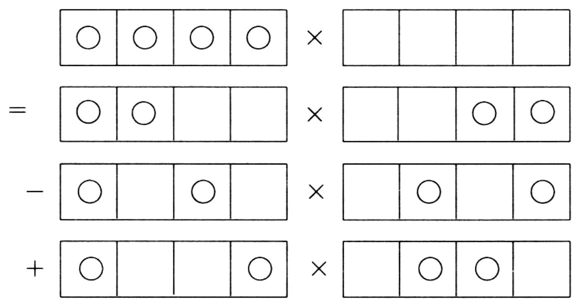
第1章でいろいろなソリトン方程式の双線形形式への変換と解について議論してきた．では双線形方程式とは一体何なのか．具体的な個々の方程式ではなく，双線形方程式に共通な数学的構造は何なのかとの疑問が生ずる．その答えの1つとして，双線形方程式に作用する群(カッツ・ムーディ・リー群)[1]の存在があり，その観点からソリトン方程式の統一的理解が進み，群論の分類的立場から，新しいソリトン方程式がぞくぞくと発見されたことは注目すべきである．しかし，それを理解するには深い代数学の知識を必要とする．たとえ理解し得ても，応用までに至るのは大変である．昔，量子力学が生まれた直後「グルッペン・ペストと呼ばれる群論の大流行があった」と聞いているが，ほとんどの人は群論の勉強だけに終わったようである．この本は予備知識の少ない理工学系大学の4年生・大学院生が理解できるように書いているので，群の部分はほとんど省略する．

双線形方程式に対する新しい観点は，佐藤幹夫による「双線形方程式はグラ

スマン多様体におけるプリュッカーの関係式」である[2]．これは深い数学的知識にもとづいてソリトン方程式を解釈したもので，その美しさに驚嘆し，強い影響を受けたが，その後の発展はあまりに抽象的で，筆者にはよく理解できないところがある．

「非線形微分方程式の厳密解を具体的に求めよう．新しいソリトン方程式を発見しよう」と思っている筆者のような現実派には，抽象論はあまり役に立つとは思えない．それと非線形偏微分方程式の差分スキームの問題に重要な役割を演じる非線形**偏差分**ソリトン方程式を生成するには，いまのところあまり有効ではない．「ソリトン方程式は必ず差分化できる」と信じているし，今後は差分の時代とも思っているので，佐藤理論もこの本では深く追究しない．この本では，「双線形方程式とはパフィアン(Pfaffian)の恒等式である」との観点に立って，ソリトン方程式を統一的に把握する．

パフィアンの恒等式は佐藤のマヤ(Maya)図形を使って象徴的に表現すると



となる．この図形の意味を理解するのがこの章の目的である．そのためにまずパフィアン(行列式もパフィアンの一種である)の諸性質を学ぶ必要がある．

2-1　パフィアン

行列式の諸性質についてはよく知られているが，パフィアン[3]の諸性質についてはほとんど知られていない．この節ではパフィアンのもつ，行列式以上に多彩な性質について述べる．行列式について成り立つ恒等式(たとえばプリュ

ッカーの関係式，ヤコビの等式，など）は拡張され，統一化されて，パフィアンの恒等式に帰着する．しかもパフィアンの恒等式の方が簡明である．それ以外にもいろいろと面白い性質がある．これらはすべてソリトン方程式の研究を通じて発掘（再発見）されたものであるが，パフィアンにたいする知識が普及すると，ソリトン以外への応用も開けてくるものと確信する．

パフィアンは行列式を通して知られている．A を次数 m の反対称行列式

$$A = \det|a_{jk}| \qquad (1 \leqq j, k \leqq m) \tag{2.1}$$

とする．ここで要素 a_{jk} は，$j, k=1, 2, \cdots, m$ について反対称性 $a_{jk}=-a_{kj}$ をもっている．m が奇数のとき行列式 A は 0 になるが，偶数のときは，パフィアンの 2 乗になる．このパフィアンの次数は $2n$ で，次のように表記する．

$$(1, 2, \cdots, 2n)$$

例えば $n=1$ のとき

$$\det\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12})^2 \tag{2.2}$$

次に $n=2$ のとき

$$\det\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})^2$$

$$\equiv (1, 2, 3, 4)^2 \tag{2.3}$$

である．したがって 4 次のパフィアン $(1, 2, 3, 4)$ は

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2)(3, 4)-(1, 3)(2, 4)+(1, 4)(2, 3) \tag{2.4}$$

と展開される．ここで，$j<k$ のとき $(j, k)=a_{jk}$ である．a_{jk} の反対称性 $(a_{kj}=-a_{jk})$ から

$$(k, j) = -(j, k) \tag{2.5}$$

である．

一般に $2n$ 次のパフィアンは次のように展開される．最初の文字 "1" を基準に展開すると

$$(1, 2, 3, \cdots, 2n)$$

$$= (1,2)(3,4,\cdots,2n)-(1,3)(2,4,\cdots,2n)$$
$$+(1,4)(2,3,5,\cdots,2n)-\cdots+(1,2n)(2,3,\cdots,2n-1)$$
$$= \sum_{j=2}^{2n}(-1)^j(1,j)(2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n) \tag{2.6}$$

ここで $\hat{j}$ は j を除くことを意味している．最後の文字 "$2n$" を基準に展開すると

$$(1,2,3,\cdots,2n)$$
$$= (2,3,\cdots,2n-1)(1,2n)-(1,3,\cdots,2n-1)(2,2n)$$
$$+(1,2,4,\cdots,2n-1)(3,2n)-\cdots+(1,2,\cdots,2n-2)(2n-1,2n)$$
$$= \sum_{j=1}^{2n-1}(-1)^{j-1}(1,2,\cdots,\hat{j},\cdots,2n-1)(j,2n) \tag{2.7}$$

である．

これらの展開をつづけると，最後は2次のパフィアン(これを要素とよぶ)の積の和[3]に帰着する．

$$= \sum_P{}'(-1)^P(i_1,i_2)(i_3,i_4)(i_5,i_6)\cdots(i_{2n-1},i_{2n}) \tag{2.8}$$

ここで，$\sum'$ は $\{1,2,3,\cdots,2n\}$ の中から選んだ n 個のペアの組合せについての和を意味している．ただしペアの組合せには次の条件をつける．

$$\begin{gathered} i_1<i_2,\ \ i_3<i_4,\ \ i_5<i_6,\ \ \cdots,\ \ i_{2n-1}<i_{2n} \\ i_1<i_3<i_5<\cdots<i_{2n-1} \end{gathered} \tag{2.9}$$

そして，$(-1)^P$ は順列 $\{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_{2n}\}$ の順列 $\{1,2,3,\cdots,2n\}$ にたいする偶奇性によって $+$ または $-$ の値になる．

［注1］　この展開式(2.8)はソリトン理論ではほとんど利用しないので正確に記憶する必要はないが，これによってパフィアンを定義することもできる．❙

［注2］　この展開式(2.8)は n 次の行列式の展開式

$$\det|a(j,k)|_{1\le j,k\le n}$$
$$= \begin{vmatrix} a(11) & a(12) & a(13) & \cdots & a(1n) \\ a(21) & a(22) & a(23) & \cdots & a(2n) \\ a(31) & a(32) & a(33) & \cdots & a(3n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a(n1) & a(n2) & a(n3) & \cdots & a(nn) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_P{}'(-1)^P a(i_1, 1)a(i_2, 2)a(i_3, 3)\cdots a(i_n, n) \qquad (2.10)$$

によく似ている. ❙

［注 3］ $2n$ 次のパフィアンは $2n$ 個の文字$(1, 2, \cdots, 2n)$で表現されているが，独立な要素(i, j)の数は $2n$ 個から 2 個を選ぶ組合せの数 ${}_{2n}C_2$ に等しい. ❙

［注 4］ $2n$ 個の文字のうち，任意の 2 つの文字が一致するとき，パフィアンの値は 0 になる. ❙

［注 5］ パフィアン$(1, 2, 3, 4, \cdots, 2n)$の表記方法としてこの他にも次の形式も使う.

（i） パフィアンのすべての要素を明示したいときには，行列式の表示を斜め半分に切った形で次のように表記する[3].

$$(1, 2, 3, 4, \cdots, 2n) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,2n} \\ & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,2n} \\ & & a_{34} & \cdots & a_{3,2n} \\ & & & \cdots\cdots & \\ & & & & a_{2n-1,2n} \end{vmatrix} \qquad (2.11)$$

（ii） n 次の行列式の表示方法 $\det|a_{jk}|_{1 \leqq j,\, k \leqq n}$ を参考にして，

$$(1, 2, 3, 4, \cdots, 2n) = \mathrm{Pf}\,(a_{ij})_{1 \leqq i < j \leqq 2n}$$

と表わす. ❙

［注 6］ パッフ(Johann Friedrich Pfaff) (1765–1825) は微分方程式のパッフ形式で有名である. 大数学者ガウスの博士論文の審査員であったことも知られている. ❙

2–2 外積代数

ベクトルの外積(ベクトル積) $A \times B = -B \times A$ という概念を基礎にした外積代数を使うと，行列式やパフィアンが見通しよく定義できる. まず **1 次式**(one-form)を導入する.

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x^j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2.12)$$

ここで基本になるのは，x^j が次の反対称な交換関係

$$x^i \wedge x^j = -x^j \wedge x^i, \qquad x^i \wedge x^i = 0 \tag{2.13}$$

を満足していることで，それ以外はふつうの計算法にしたがうものとする．

［注］ 積の記号 $\times$ の代わりに記号 $\wedge$ を使う．▎

係数 $a_{i,j}$ は任意の複素関数である．行列式 $\det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq n}$ は，n 個の 1 次式の外積によって定義される．

$$\begin{aligned}&\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \cdots \wedge \omega_n\\ &\quad \equiv \det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq n} x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^n\end{aligned} \tag{2.14}$$

例えば $n=2$ のとき，

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 &= (a_{1,1}x^1 + a_{1,2}x^2) \wedge (a_{2,1}x^1 + a_{2,2}x^2)\\ &= (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})x^1 \wedge x^2\\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix} x^1 \wedge x^2\end{aligned} \tag{2.15}$$

次に Ω を **2 次式** (two-form) とする．

$$\Omega = \sum_{1\leqq i<j\leqq 2n} b_{i,j} x^i \wedge x^j, \qquad b_{i,j} = -b_{j,i} \tag{2.16}$$

第 (i,j) 要素が $b_{i,j}$ であるパフィアン $(1, 2, 3, \cdots, 2n)$ は Ω の n 乗（外積）によって定義される．

$$\Omega^{\wedge n} \equiv (n!)(1, 2, 3, \cdots, 2n) x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^{2n} \tag{2.17}$$

ここで $n! \equiv n(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1$ である．

この定義よりパフィアンの展開式が得られる．例えば $n=2$ のとき，

$$\begin{aligned}\Omega = {} &(1,2)x^1 \wedge x^2 + (1,3)x^1 \wedge x^3 + (1,4)x^1 \wedge x^4\\ &+ (2,3)x^2 \wedge x^3 + (2,4)x^2 \wedge x^4 + (3,4)x^3 \wedge x^4\end{aligned} \tag{2.18}$$

とおくと

$$\begin{aligned}&\Omega \wedge \Omega\\ &= \{(1,2)x^1 \wedge x^2 + (1,3)x^1 \wedge x^3 + (1,4)x^1 \wedge x^4\\ &\quad + (2,3)x^2 \wedge x^3 + (2,4)x^2 \wedge x^4 + (3,4)x^3 \wedge x^4\}\\ &\quad \wedge \{(1,2)x^1 \wedge x^2 + (1,3)x^1 \wedge x^3 + (1,4)x^1 \wedge x^4\\ &\quad + (2,3)x^2 \wedge x^3 + (2,4)x^2 \wedge x^4 + (3,4)x^3 \wedge x^4\}\end{aligned}$$

$$= (1,2)(3,4)x^1 \wedge x^2 \wedge x^3 \wedge x^4 + (1,3)(2,4)x^1 \wedge x^3 \wedge x^2 \wedge x^4$$
$$+ (1,4)(2,3)x^1 \wedge x^4 \wedge x^2 \wedge x^3 + (2,3)(1,4)x^2 \wedge x^3 \wedge x^1 \wedge x^4$$
$$+ (2,4)(1,3)x^2 \wedge x^4 \wedge x^1 \wedge x^3 + (3,4)(1,2)x^3 \wedge x^4 \wedge x^1 \wedge x^2$$
$$= 2[(1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3)]x^1 \wedge x^2 \wedge x^3 \wedge x^4 \qquad (2.19)$$

一方，定義より

$$\Omega \wedge \Omega \equiv 2(1,2,3,4)x^1 \wedge x^2 \wedge x^3 \wedge x^4 \qquad (2.20)$$

ゆえに，展開形式

$$(1,2,3,4) = (1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3) \qquad (2.21)$$

が得られた．

2–3 行列式とロンスキアンのパフィアンによる表現

パフィアンを $2n$ 次の反対称行列式を通して定義したが，逆に n 次の行列式 B

$$B \equiv \det |b(j,k)|_{1 \leq j,k \leq n} \qquad (2.22)$$

は $2n$ 次のパフィアン $(1,2,\cdots,n,n^*,\cdots,2^*,1^*)$ で表現される．

$$\det |b(j,k)|_{1 \leq j,k \leq n} = (1,2,\cdots,n,n^*,\cdots,2^*,1^*) \qquad (2.23)$$

ここで，パフィアンの要素 (j,k), (j^*,k^*), (j,k^*) は次のように定義されている．

$$(j,k) = 0, \qquad (j^*,k^*) = 0, \qquad (j,k^*) = b(j,k) \qquad (2.24)$$

［注］ j の右肩にある $*$ の意味はもともと場の量子論における生成消滅演算子[3)]に関係していたが，いまの場合単に j と j^* を区別するための目印になっている． ❙

例えば，$n=2$ のとき，

$$\det \begin{vmatrix} b(1,1) & b(1,2) \\ b(2,1) & b(2,2) \end{vmatrix} = (1,2,2^*,1^*) \qquad (2.25)$$

である．なぜなら，

$$右辺 = -(1,2^*)(2,1^*) + (1,1^*)(2,2^*)$$
$$= b(1,1)b(2,2) - b(1,2)b(2,1)$$

$$= \text{左辺}$$

次に線形常微分方程式の理論によく出てくる**ロンスキアン**(Wronskian)を考える．n 次のロンスキアン $Wr(f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n)$ は次のように定義されている．

$$Wr(f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n) \equiv \det\left|\frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}} f_i\right|_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1^{(0)} & f_1^{(1)} & f_1^{(2)} & \cdots & f_1^{(n-1)} \\ f_2^{(0)} & f_2^{(1)} & f_2^{(2)} & \cdots & f_2^{(n-1)} \\ f_3^{(0)} & f_3^{(1)} & f_3^{(2)} & \cdots & f_3^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^{(0)} & f_n^{(1)} & f_n^{(2)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (2.26)$$

ここで $f_i^{(m)}$ は x の関数 $f_i(x)$ の x による m 次微分の略記号である．

$$f_i^{(m)} \equiv \frac{\partial^m}{\partial x^m} f_i \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (2.27)$$

$f_i^{(m)}$ を表現するパフィアン (d_m, i) を導入しよう．

$$\begin{aligned} (d_m, i) &\equiv f_i^{(m)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ (d_m, d_n) &\equiv 0 \qquad (m, n = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned} \qquad (2.28)$$

この記号によって n 次のロンスキアンは $2n$ 次のパフィアンで表現される[4]．

$$Wr(f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n) = (d_0, d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}, n, \cdots, 3, 2, 1) \qquad (2.29)$$

例えば，$n=2$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_1^{(0)} & f_1^{(1)} \\ f_2^{(0)} & f_2^{(1)} \end{vmatrix} &= (d_0, d_1, 2, 1) \\ &= -(d_0, 2)(d_1, 1) + (d_0, 1)(d_1, 2) \\ &= f_1^{(0)} f_2^{(1)} - f_2^{(0)} f_1^{(1)} \end{aligned} \qquad (2.30)$$

となる．

n 次の行列式は $2n$ 次のパフィアン $(1, 2, \cdots, n, n^*, \cdots, 2^*, 1^*)$ で表現されることを示したが，<u>$2n$ 次</u>の行列式は<u>$2n$ 次</u>のパフィアンでも表現できることを注意しておこう．前節 2–2 の外積代数によると，$2n$ 個の 1 次式

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{2n} a_{i,j} x^j \qquad (i = 1, 2, \cdots, 2n) \qquad (2.31)$$

によって行列式 $\det|a_{i,j}|_{1 \leq i, j \leq 2n}$ が定義される．

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \cdots \wedge \omega_{2n} \equiv \det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq 2n} x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^{2n} \tag{2.32}$$

次に Ω を2次式とする.

$$\Omega = \sum_{1\leqq i<j\leqq 2n} (i,j) x^i \wedge x^j$$

パフィアン $(1, 2, 3, \cdots, 2n)$ は Ω の n 乗(外積)によって定義される.

$$\Omega \wedge^n \equiv (n!)(1, 2, 3, \cdots, 2n) x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^{2n} \tag{2.33}$$

さて，特別な形をもつ2次式 Ω を考えよう.

$$\Omega \equiv \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4 + \cdots + \omega_{2N-1} \wedge \omega_{2N} \tag{2.34}$$

この Ω の N 乗は

$$\Omega \wedge^N = (N!)\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \cdots \wedge \omega_{2N} \tag{2.35}$$

である．ここで

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{2N} a_{i,j} x^j \qquad (i=1, 2, \cdots, 2N) \tag{2.36}$$

とおくと，定義により

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \cdots \wedge \omega_{2N} = \det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq 2N} x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^{2N} \tag{2.37}$$

であるから，これを代入すると

$$\Omega \wedge^N = (N!) \det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq 2N} x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^{2N} \tag{2.38}$$

を得る．一方，式(2.36)を式(2.34)に代入すると

$$\Omega = \sum_{1\leqq i<j\leqq 2N} b_{i,j} x^i \wedge x^j \tag{2.39}$$

ここで,

$$b_{i,j} \equiv \sum_{m=1}^{N} (a_{2m-1,i} a_{2m,j} - a_{2m-1,j} a_{2m,i})$$

である．式(2.39)を N 乗すると

$$\Omega \wedge^N = (N!)(1, 2, \cdots, 2N) x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^{2N} \tag{2.40}$$

ここで

$$(i,j) \equiv b_{i,j} \qquad (i,j=1, 2, \cdots, 2N)$$

である.

式(2.38)と式(2.40)は等しいので，結局

$$\det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq 2N} = (1, 2, \cdots, 2N) \tag{2.41}$$

となり，$2N$ 次の行列式が $2N$ 次のパフィアンで表現されたことになる．例えば，$N=1$ の場合，

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (1,2)$$

$$\equiv a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \tag{2.42}$$

となる．

奇数次の行列式に対しては次の表現になる．

$$\det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq 2N+1} = (d_0, 1, 2, \cdots, 2N+1) \tag{2.43}$$

ここで

$$(i,j) \equiv \sum_{m=1}^{N} (a_{2m-1,i}a_{2m,j} - a_{2m-1,j}a_{2m,i})$$

であり，新しいパフィアン (d_0, i) は

$$(d_0, i) = a_{2N+1,i} \tag{2.44}$$

である．$2N+1$ 次の行列式は $2N+2$ 次のパフィアンで表現されている．

例えば $N=1$ の場合

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{3,1}[a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}] - a_{3,2}[a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}]$$

$$+ a_{3,3}[a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}]$$

$$= (d_0, 1)(2,3) - (d_0, 2)(1,3) + (d_0, 3)(1,2)$$

$$= (d_0, 1, 2, 3) \tag{2.45}$$

となる．これから分かるように，奇数次の行列式にたいするパフィアン表現は，行列式を最後の行で展開し，偶数次の行列式の和と考え，そこで偶数次の行列式のパフィアン表現を使うと得られる．

2-4　行列式のラプラス展開，プリュッカーの関係式

a)　行列式のラプラス展開[5)]

n 次の行列式 $A_n \equiv \det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq n}$ は r 次と $n-r$ 次の行列式の積の和として表

現できる．

まず 1, 2, 3, …, n から r 個の $i_1, i_2, \cdots, i_r$ をとり，$i_1<i_2<\cdots<i_r$ を与えたとし，その残りを $i_{r+1}, i_{r+2}, \cdots, i_n$ $(i_{r+1}<i_{r+2}<\cdots<i_n)$ とする．このとき n 次の行列式 A_n は

$$A_n = \sum(-1)^P \varDelta\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{bmatrix} \varDelta\begin{bmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \end{bmatrix}$$
$$P = i_1+i_2+\cdots+i_r+j_1+j_2+\cdots+j_r \tag{2.46}$$

で与えられる．ここで，$\varDelta\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{bmatrix}$ は第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行，第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列の要素 $a_{i,j}$ から作られる r 次の行列式であり，$\varDelta\begin{bmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \end{bmatrix}$ も同様な $n-r$ 次の行列式である．ただし，$j_1, j_2, \cdots, j_r$ は 1, 2, …, n から選んだ整数 $(j_1<j_2<\cdots<j_r)$ であり，$j_{r+1}, j_{r+2}, \cdots, j_n$ は残りの整数である．$\sum$ は r 個の $j_1, j_2, \cdots, j_r$ の選び方についての ${}_nC_r \equiv n!/r!(n-r)!$ 個の和である．この展開式を**ラプラス展開**という．

［注］ 和算家の久留島義太（?–1757）はラプラス (P. S. Laplace) (1749–1827) 以前に行列式のラプラス展開を見出している（日本数学会編『数学辞典』第 3 版，岩波書店，450 頁）．❙

一般式ではラプラス展開がどんなものであるかを理解しにくいので，次に例題と導き方を示す．例えば，4 次の行列式を 2 次の行列式の積で展開すると

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} \tag{2.47}$$

となる．これがラプラス展開である．

この展開式を外積代数を使って示す．$\omega_i\ (i=1,2,3,4)$ を 1 次式とする．

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{4} a_{i,j} x^j \qquad (i=1,2,3,4) \tag{2.48}$$

とおくと，定義により

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} x^1 \wedge x^2 \wedge x^3 \wedge x^4 \tag{2.49}$$

である．一方

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + a_{14}x^4) \\ &\quad \wedge (a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + a_{24}x^4) \\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} x^1 \wedge x^2 + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} x^1 \wedge x^3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix} x^1 \wedge x^4 + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} x^2 \wedge x^3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix} x^2 \wedge x^4 + \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} x^3 \wedge x^4 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \omega_3 \wedge \omega_4 &= \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} x^1 \wedge x^2 + \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} x^1 \wedge x^3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} x^1 \wedge x^4 + \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} x^2 \wedge x^3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} x^2 \wedge x^4 + \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} x^3 \wedge x^4 \end{aligned}$$

を得る．これらの式を

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge (\omega_3 \wedge \omega_4)$$

に代入すると

$$
\begin{aligned}
=&\left\{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix}\right. \\
&+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} \\
&\left.-\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}\right\} \\
&\times x^1 \wedge x^2 \wedge x^3 \wedge x^4
\end{aligned}
$$

となる．定義により括弧$\{\cdots\}$の中は4次の行列式に等しいので，展開式が示された．これを一般化してN個の1次式

$$
\omega_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} x^j \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{2.50}
$$

により，生成したN次の行列式

$$
\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \cdots \wedge \omega_N = \det| a_{i,j} |_{1 \leqq i,j \leqq N} x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^N \tag{2.51}
$$

を分解してr次と$N-r$次の行列式

$$
(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_r) \wedge (\omega_{r+1} \wedge \omega_{r+2} \wedge \cdots \wedge \omega_N)
$$

の積の和として展開したのが**ラプラスの展開定理**(Laplace expansion theorem)である．

b)　プリュッカーの関係式

2次の行列式の積の和にたいして次の恒等式が成り立つ．

$$
\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0 \tag{2.52}
$$

この式は，各行列式を展開して積の和を計算すると正しいことが理解できる．別の方法として，恒等的に0である4次の行列式

$$
\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.53}
$$

のラプラス展開

$$
0=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{2.54}
$$

であると見ることもできる．この恒等式では，行は何も変化していなくて，列の差だけが重要になるので，行を省略して次のように表現してもよい．

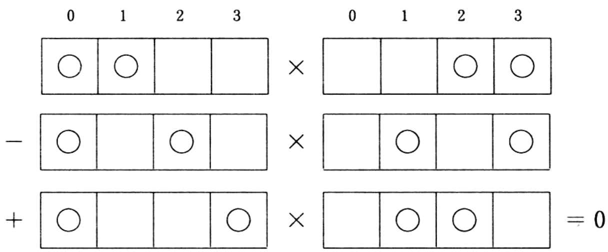
$$(a_0 \quad a_1)(a_2 \quad a_3)-(a_0 \quad a_2)(a_1 \quad a_3)+(a_0 \quad a_3)(a_1 \quad a_2)=0 \tag{2.55}$$

これが**プリュッカーの関係式**(Plücker relations)の最も簡単な場合である．

上の式では添字のみが重要なので，文字 a を省略して次のように表現する．

$$(0 \quad 1)(2 \quad 3)-(0 \quad 2)(1 \quad 3)+(0 \quad 3)(1 \quad 2)=0 \tag{2.56}$$

この表現を図式化して次の図形(佐藤のマヤ図形)に置き換える．



同じようにして3次の行列式の積の和にたいして，次の恒等式が成り立つ．

$$\begin{vmatrix} f & a_0 & a_1 \\ g & b_0 & b_1 \\ h & c_0 & c_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f & a_2 & a_3 \\ g & b_2 & b_3 \\ h & c_2 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f & a_0 & a_2 \\ g & b_0 & b_2 \\ h & c_0 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f & a_1 & a_3 \\ g & b_1 & b_3 \\ h & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f & a_0 & a_3 \\ g & b_0 & b_3 \\ h & c_0 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f & a_1 & a_2 \\ g & b_1 & b_2 \\ h & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0 \tag{2.57}$$

この式は恒等的に0である次の6次の行列式のラプラス展開である．

$$\begin{vmatrix} f & a_0 & a_1 & 0 & a_2 & a_3 \\ g & b_0 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ h & c_0 & c_1 & 0 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & a_1 & f & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_1 & g & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_1 & h & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.58}$$

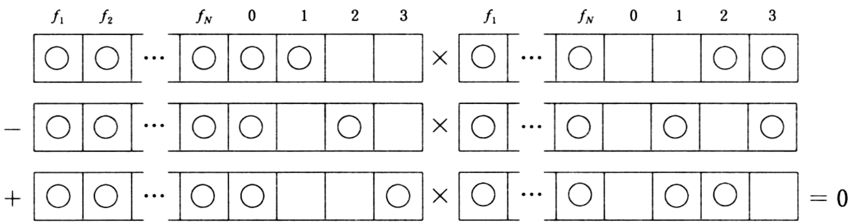
省略記号を使うと

$$
\begin{aligned}
&(f \quad a_0 \quad a_1)(f \quad a_2 \quad a_3)-(f \quad a_0 \quad a_2)(f \quad a_1 \quad a_3) \\
&\quad +(f \quad a_0 \quad a_3)(f \quad a_1 \quad a_2) = 0
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

である．この関係式は追加した列 f の部分が拡張できて

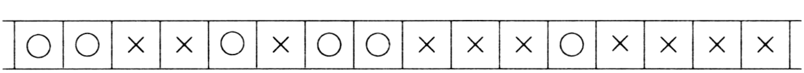
$$
\begin{aligned}
&(f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N \quad a_0 \quad a_1)(f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N \quad a_2 \quad a_3) \\
&-(f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N \quad a_0 \quad a_2)(f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N \quad a_1 \quad a_3) \\
&+(f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N \quad a_0 \quad a_3)(f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N \quad a_1 \quad a_2) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

となる．これをマヤ図形で表現する．

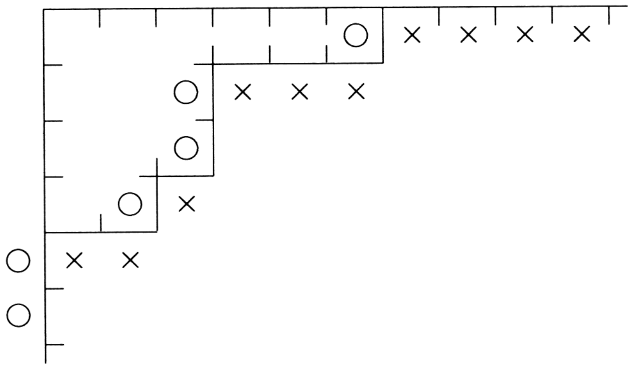


［注］ KP 方程式や 2 次元戸田格子方程式の解をロンスキアンで表示すると，双線形形式はこの恒等式に帰着する．上の添字の N は N–ソリトン解の N に対応している．解をロンスキアンで表示する利点の 1 つは N–ソリトン解の証明が 2–ソリトン解の証明とまったく同じ手順でできることである．❙

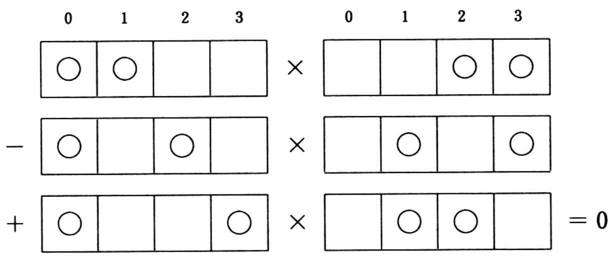
ここで佐藤によるマヤ図形とヤング図形(Young diagram)との関係[6]について触れる．マヤ図形とは 1 次元的に配列されたセルにフェルミ粒子が分配されている状態を示す図形である．フェルミ粒子だから 1 つのセルには 1 個の粒子しか入れない．ただし充分左の方のセルは粒子が詰まっているし，充分右の方のセルは空白であるとする．これは真空状態からフェルミ粒子が励起されている状態に対応している．粒子が入っているセルには中に○印を，粒子がいないセルには×印を書いて区別する．粒子がいないセルを空白で表わしてきたが，ヤング図形との対応を明確に表現するために×で表わした．かってに与えられたマヤ図形



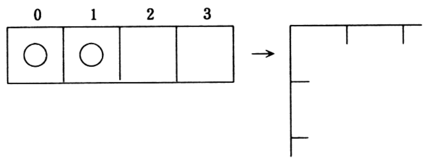
は，次のヤング図形と対応している[6].



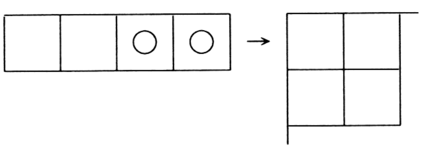
すなわちヤング図形では○は縦棒“|”に，×は横棒“—”に対応する．したがってプリュッカーの関係式



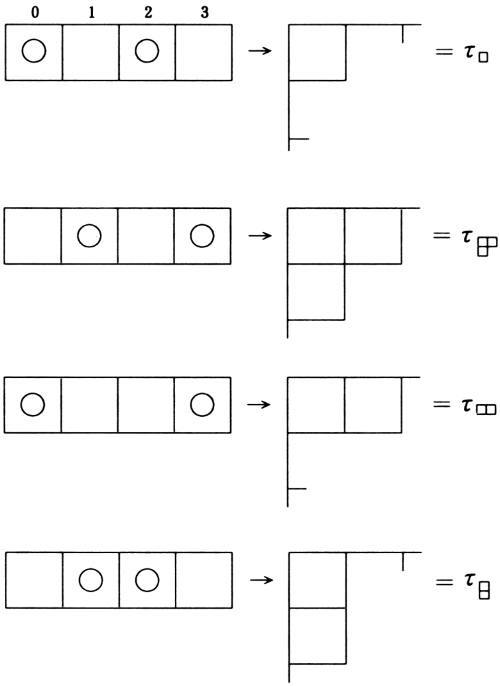
において，



$= \tau_{\emptyset}$



$= \tau_{\boxplus}$



(ここで ∅ は“空”を意味する)と表記すると,

$$\tau_{\varnothing}\tau_{\substack{\square\square\\\square\square}} - \tau_{\square}\tau_{\substack{\square\square\\\square}} + \tau_{\square\square}\tau_{\substack{\square\\\square}} = 0$$

となる．KP 方程式の双線形形式

$$(D_1{}^4 - 4D_1D_3 + 3D_2{}^2)\tau\cdot\tau = 0 \tag{2.61}$$

が，このプリュッカーの関係式に帰着することを最初に発見したのは佐藤である[2)]．

2–5　行列式に対するヤコビの公式

a)　余因子

行列式 $D=\det|a(j,k)|_{1\leq j,\, k\leq n}$ の $a(i,j)$ にたいする余因子 $\varDelta(i,j)$ は，行列式か

ら i 行，j 列を除き符号 $(-1)^{i+j}$ を付けたものである．そのとき次の展開公式が成り立つ．

$$D = \sum_{i=1}^{n} a(i,j)\Delta(i,j) \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a(i,j)\Delta(i,j) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.62}$$

上の式は次の関係式(直交性)の特別の場合である．

$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)\Delta(i,k) = \delta_{jk}D \tag{2.63a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a(i,j)\Delta(k,j) = \delta_{ik}D \tag{2.63b}$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ ($i=j$ のとき 1 それ以外は 0) である．

同様にパフィアン $(1,2,3,\cdots,2n)$ の (i,j) に対する余因子，$\Gamma(i,j)$ を次式で導入する．

$$\Gamma(i,j) = (-1)^{i+j-1}(1,2,\cdots,\hat{i},\cdots,\hat{j},\cdots,2n) \qquad (i<j)$$
$$\Gamma(j,i) = -\Gamma(i,j), \qquad \Gamma(i,i) = 0 \tag{2.64}$$

$n=0$ のときは $\Gamma(1,2)=-\Gamma(2,1)=1$ と定義する．そのとき次の展開公式が成り立つ．

$$(1,2,3,\cdots,2n) = \sum_{j=1}^{2n}(i,j)\Gamma(i,j) \qquad (i=1,2,\cdots,2n) \tag{2.65}$$

この式はパフィアンの展開形式を余因子を使って書き直しただけの公式である．

行列式の場合と同様にパフィアンに対しても，直交性

$$\sum_{i=1}^{2n}(i,j)\Gamma(i,k) = \delta_{jk}P \tag{2.66a}$$

$$\sum_{j=1}^{2n}(i,j)\Gamma(k,j) = \delta_{ik}P \tag{2.66b}$$

が成り立つ．ここで P は $2n$ 次のパフィアンである．

$$P \equiv (1,2,3,\cdots,2n)$$

例えば，$j=1$，$k=2$ のときパフィアンの直交性は

$$\sum_{i=3}^{2n}(1,i)\Gamma(2,i) = 0$$

となるが，これは値が 0 のパフィアン $(1,1,3,4,\cdots,2n)$ の展開式である．

ここで行列式 D の次数 n が偶数で要素 $a(i,j)$ がパフィアン (i,j) に等しい場合を考えると，直交性を示す式(2.63)は

$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)\Delta(i,k) = \delta_{jk}P^2$$
$$\sum_{j=1}^{n} a(i,j)\Delta(k,j) = \delta_{ik}P^2 \tag{2.67}$$

となる．この式とパフィアンにおける直交性を示す式(2.66)を比較して，

$$\Delta(i,k) = \Gamma(i,k)P \tag{2.68}$$

を得る．

パフィアンの余因子 $\Gamma(i,j)$ は定義により反対称であるので，余因子 $\Gamma(i,j)$ を要素とする $2m$ 次のパフィアン $\Gamma(1,2,3,\cdots,2m)$ が考えられる．

$$\Gamma(1,2,3,\cdots,2m) = \begin{vmatrix} \Gamma(1,2) & \Gamma(1,3) & \cdots & \Gamma(1,2m) \\ & \Gamma(2,3) & \cdots & \Gamma(2,2m) \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & & \Gamma(2m-1,2m) \end{vmatrix} \tag{2.69}$$

［注］　このパフィアンの展開式は

$$\Gamma(1,2,3,\cdots,2m) = \sum_{j=1}^{2m}(-1)^j\Gamma(1,j)\Gamma(2,3,\cdots,\hat{j},\ \cdots,2m) \tag{2.70}$$

であるが，じつはこの式の読み換えによっても「パフィアンの恒等式」が得られる．❙

b）　行列式に対するヤコビの公式[5)]

N 次の行列式 $D=\det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq N}$ から第 j 行と第 k 列を取り除いて作った $N-1$ 次の行列式を a_{jk} に対する小行列式といい，これを $D\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}$ と表記する．$D\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}$ に符号 $(-1)^{j+k}$ をつけたものは，先に定義したように a_{jk} に対する余因子 Δ_{jk} である．

$$\Delta_{jk} \equiv (-1)^{j+k}D\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

ここで

$$D\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k-1} & k\text{列} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k-1} & & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & a_{j-1,3} & \cdots & a_{j-1,k-1} & & a_{j-1,k+1} & \cdots & a_{j-1,N} \\ j\text{行} & & & & & & & & \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & a_{j+1,3} & \cdots & a_{j+1,k-1} & & a_{j+1,k+1} & \cdots & a_{j+1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{N,k-1} & & a_{N,k+1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \tag{2.72}$$

である．同様に行列式 D から第 j, k 行と第 l, m 列を取り除いて作った $N-2$ 次の行列式を $D\begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}$ と表わす．このとき次の恒等式が成り立つ．

$$D\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} D\begin{bmatrix} j \\ j \end{bmatrix} - D\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} D\begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix} D \tag{2.73}$$

これを行列式に対する**ヤコビの公式**[5]という．

一般的な関係式では実感がわかないので，$N=3$ の場合を書くと，ヤコビの公式は

$$D\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} D\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - D\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} D\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} D \tag{2.74}$$

である．これを具体的に表現する．$N=3$ だから

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.75}$$

である．$D\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ は D から 2 行目と 2 列目を消去した行列式である．

$$D\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.76}$$

同様に

$$\begin{aligned} D\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ D\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad D\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = a_{11} \end{aligned} \tag{2.77}$$

となる．したがってヤコビの公式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.78}$$

である．この公式は行列式を直接計算して確かめることができる．N が 3, 4, 5 くらいまでは数式処理を使って確かめられるが，一般の N についてはやはり証明が必要である．次のような証明法[5]が知られている．

天下りに次の n 次の正方行列式の積($=D\Delta_{22}$)を考える．

$$\begin{vmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [E] & [\Delta_{12}] \\ [0] & [\Delta_{22}] \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \Delta_{r+1,1} & \cdots & \Delta_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \Delta_{r+1,2} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \Delta_{r+1,r} & \cdots & \Delta_{nr} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Delta_{r+1,r+1} & \cdots & \Delta_{n,r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Delta_{r+1,n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.79}$$

ここで，$[E]$ は r 次の単位行列，$[0]$ は $(n-r)\times r$ 次の零行列，

$$[A_{11}] \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}, \qquad [A_{12}] \equiv \begin{vmatrix} a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \end{vmatrix}$$

$$[A_{21}] \equiv \begin{vmatrix} a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} \\ a_{r+2,1} & \cdots & a_{r+2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{vmatrix}, \qquad [A_{22}] \equiv \begin{vmatrix} a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r+2,r+1} & \cdots & a_{r+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$[\Delta_{12}] \equiv \begin{vmatrix} \Delta_{r+1,1} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{r+1,2} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{r+1,r} & \cdots & \Delta_{nr} \end{vmatrix}, \qquad [\Delta_{22}] \equiv \begin{vmatrix} \Delta_{r+1,r+1} & \cdots & \Delta_{n,r+1} \\ \Delta_{r+1,r+2} & \cdots & \Delta_{n,r+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{r+1,n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{vmatrix}$$

である.

要素 a_{ij} と余因子 $\varDelta_{ij}$ の直交性により

$$\begin{vmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [E] & [\varDelta_{12}] \\ [0] & [\varDelta_{22}] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [A_{11}] & [\mathbf{0}] \\ [A_{21}] & D[\boldsymbol{E}] \end{vmatrix} \tag{2.80}$$

となる. ここで $[\mathbf{0}]$ は $r\times(n-r)$ の零行列, $[\boldsymbol{E}]$ は $(n-r)\times(n-r)$ の単位行列, $D=\det|a_{i,j}|_{1\leqq i,j\leqq n}$ である. したがって

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & D & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & 0 & \cdots & D \end{vmatrix} \tag{2.80$'$}$$

である. この関係式は

$$D\begin{vmatrix} \varDelta_{r+1,r+1} & \cdots & \varDelta_{n,r+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varDelta_{r+1,n} & \cdots & \varDelta_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} D^{n-r}$$

または,

$$\begin{vmatrix} \varDelta_{r+1,r+1} & \cdots & \varDelta_{n,r+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varDelta_{r+1,n} & \cdots & \varDelta_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} D^{n-r-1} \tag{2.81}$$

に等しい. 式(2.81)で $r=n-2$ とおくと次式になる.

$$\varDelta_{n-1,n-1}\varDelta_{n,n}-\varDelta_{n-1,n}\varDelta_{n,n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} D \tag{2.82}$$

これはヤコビの公式

$$D\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} D\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} - D\begin{bmatrix} n-1 \\ n \end{bmatrix} D\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} n-1 & n \\ n-1 & n \end{bmatrix} D \tag{2.83}$$

である. (証明終り)

蛇足. このような一般的証明を見ても, すぐにヤコビの公式が理解できるものではない. 筆者は公式の正しいことを数式処理でチェックしたり, 別の証明

法を考えたり，実際問題に利用したりして，やっと分かったような気になった．❙

［注 1］　このヤコビの公式は 2-3 節の行列式のパフィアン表示により，$(j,k)=(j^*,k^*)=0$，$(j,k^*)=a_{j,k}$ とおくと，

$$D\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} = (1, 2, \cdots, n-2, n, n^*, n-2^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

$$D\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = (1, 2, \cdots, n-2, n-1, n-1^*, n-2^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

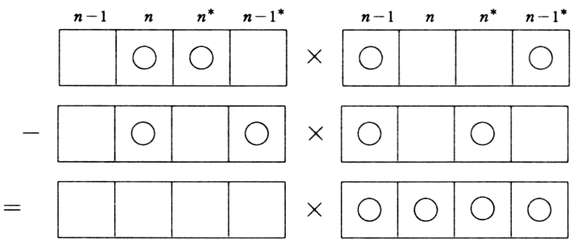
$$D\begin{bmatrix} n-1 \\ n \end{bmatrix} = (1, 2, \cdots, n-2, n, n-1^*, n-2^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

$$D\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = (1, 2, \cdots, n-2, n-1, n^*, n-2^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

$$D\begin{bmatrix} n-1 & n \\ n-1 & n \end{bmatrix} = (1, 2, \cdots, n-2, n-2^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

$$D = (1, 2, \cdots, n-2, n-1, n, n^*, n-1^*, n-2^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

が得られる．これをマヤ図形を使って表現すると



となる．❙

［注 2］　後で示すように，KP 方程式や 2 次元戸田方程式の解をグラミアン型の行列式で表現すると，双線形方程式は行列式に対するヤコビの公式に帰着する．じつは筆者はソリトンの研究を始めたとき，ヤコビの公式を知らなかった．双線形 KdV 方程式の解が行列式で表現されることを予想したが，それが解になることを行列式のままでは証明できなかった．いろいろと試行錯誤した結果，行列式をわざわざ展開して解の表現を書き換え，ある多項式の恒等式[7]

(Hirota condition)を示すことによって証明したが，幸いなことにこの解の表示と証明法はA型，B型，…[8)]のソリトン方程式すべてに有効である．行列式に対するヤコビの公式を使った証明法は，解がパフィアンで表現されるB型のソリトン方程式には使えないので，もし筆者がヤコビの公式を知っていたら，B型のソリトン方程式の発見はずっと遅れていたかもしれない．❙

2-6　特殊な行列式

a)　完全平方式(i)

ヤコビの公式を使うと，パフィアンの定義に使った定理「n 次の反対称行列式 $A_n=\det|a_{jk}|_{1\leqq j,k\leqq n}$ は n が奇数のとき0，n が偶数のとき a_{jk} のある多項式(パフィアン)の完全平方式になる」ことが次のように示せる．

反対称行列式 A_n の行と列をいれかえると $(-1)^n A_n$ になる．n が奇数のとき，$A_n=-A_n$．例えば，

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix} \tag{2.84}$$

である．したがって $A_n=0$ である．

ヤコビの公式で D を $2m$ 次の反対称行列式とする．このとき

$$D\begin{bmatrix} 2m \\ 2m \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} 2m-1 \\ 2m-1 \end{bmatrix} = 0$$
$$D\begin{bmatrix} 2m-1 \\ 2m \end{bmatrix} = -D\begin{bmatrix} 2m \\ 2m-1 \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

したがって

$$D\begin{bmatrix} 2m-1 & 2m \\ 2m-1 & 2m \end{bmatrix} D = \left(D\begin{bmatrix} 2m-1 \\ 2m \end{bmatrix} \right)^2 \qquad (m=1, 2, 3, \cdots) \tag{2.86}$$

をうる．$m=1$ のとき，$D=a_{12}{}^2$ である．上の漸化式によって任意の m で D は完全平方式になる．

b)　完全平方式(ii)

n 次の単位行列 E と n 次の反対称行列 A と B を用意する．このとき，行列式 $\det|E+A\times B|$ は完全平方である．

$$\det|E+A\times B| = (1, 2, \cdots, n, \hat{1}, \hat{2}, \cdots, \hat{n})^2 \tag{2.87}$$

ここで，行列 A の要素は a_{ij}，行列 B の要素は b_{ij}，パフィアンの要素を次のとおりに選ぶ．

$$(i, j) = a_{ij} = -a_{ji}$$
$$(\hat{i}, \hat{j}) = b_{ij} = -b_{ji}$$
$$(i, \hat{j}) = (j, \hat{i}) = \delta_{ij}$$

例えば，$n=3$ のとき等式

$$\begin{vmatrix} 1+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{13}b_{32} & a_{12}b_{23} \\ a_{23}b_{31} & 1+a_{21}b_{12}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} \\ a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} & 1+a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \end{vmatrix}$$
$$= (1, 2, 3, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3})^2$$
$$= [(1, 2)(3, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3})-(1, 3)(2, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3})+(1, \hat{1})(2, 3, \hat{2}, \hat{3})]^2$$
$$= [a_{12}(\hat{1}, \hat{2})+a_{13}(\hat{1}, \hat{3})+(2, 3)(\hat{2}, \hat{3})-(2, \hat{2})(3, \hat{3})]^2$$
$$= [a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}+a_{23}b_{23}-1]^2 \tag{2.88}$$

が成り立つ．この等式は次のように示される．まずパフィアンの 2 乗を反対称行列式で表わす．

$$(1, 2, \cdots, n, \hat{1}, \hat{2}, \cdots, \hat{n})^2$$

$$= \begin{vmatrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \cdots & (1, n) & (1, \hat{1}) & (1, \hat{2}) & \cdots & (1, \hat{n}) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \cdots & (2, n) & (2, \hat{1}) & (2, \hat{2}) & \cdots & (2, \hat{n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n, 1) & (n, 2) & (n, 3) & \cdots & (n, n) & (n, \hat{1}) & (n, \hat{2}) & \cdots & (n, \hat{n}) \\ (\hat{1}, 1) & (\hat{1}, 2) & (\hat{1}, 3) & \cdots & (\hat{1}, n) & (\hat{1}, \hat{1}) & (\hat{1}, \hat{2}) & \cdots & (\hat{1}, \hat{n}) \\ (\hat{2}, 1) & (\hat{2}, 2) & (\hat{2}, 3) & \cdots & (\hat{2}, n) & (\hat{2}, \hat{1}) & (\hat{2}, \hat{2}) & \cdots & (\hat{2}, \hat{n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\hat{n}, 1) & (\hat{n}, 2) & (\hat{n}, 3) & \cdots & (\hat{n}, n) & (\hat{n}, \hat{1}) & (\hat{n}, \hat{2}) & \cdots & (\hat{n}, \hat{n}) \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\
0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\
0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{31} & b_{32} & 0 & \cdots & b_{3n} \\
\multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

さらに，単位行列が対角線上にくるように列を入れ換えて，符号を付け替える.

$$
= \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
\multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \\
0 & -b_{12} & -b_{13} & \cdots & -b_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-b_{21} & 0 & -b_{23} & \cdots & -b_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-b_{31} & -b_{32} & 0 & \cdots & -b_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
-b_{n1} & -b_{n2} & -b_{n3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} E & A \\ -B & E \end{vmatrix}
$$

行列式の公式により

$$
= |E + A \times B|
$$

（証明終り）

c)　縁どった行列式

双線形の KP 方程式や 2 次元戸田格子方程式がヤコビの公式に帰着することを示すときに重要になる行列式(縁(ふち)どった行列式)がある.

A を $n \times n$ 型の行列，$|A|$ を A の行列式，Δ_{ij} は a_{ij} に対する余因子とすると，(2.89)が成り立つ[9].

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & x_3 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & x_n \\
y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n & z
\end{vmatrix}
= |A|z - \sum_{i,j=1}^{n} \varDelta_{ij} x_i y_j \tag{2. 89}
$$

証明は比較的簡単で，左辺の行列式を第 $n+1$ 列で展開すると

$$
= |A|z + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i+1}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & i \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\
y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n
\end{vmatrix}
x_i
$$

この行列式をさらに第 $n+1$ 行で展開すると

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & i \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\
y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & j & \cdots & a_{1n} \\
 & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \\
 & & & & & i \\
 & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
y_j
$$

これを上式に代入すると，$x_i y_j$ の係数は $-\varDelta_{ij}$ となる．（証明終り）

この縁どった行列式は，第 $n+1$ 列，第 $n+1$ 行を第 1 列，第 1 行にそれぞれ移動すると次の形になる．

$$\begin{vmatrix} z & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|z - \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij} x_i y_j \qquad (2.90)$$

この等式は$z=1$のとき，次のように書き換えられる(注 1).

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x_1y_1 & a_{12}-x_1y_2 & \cdots & a_{1n}-x_1y_n \\ a_{21}-x_2y_1 & a_{22}-x_2y_2 & \cdots & a_{2n}-x_2y_n \\ a_{31}-x_3y_1 & a_{32}-x_3y_2 & \cdots & a_{3n}-x_3y_n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1}-x_ny_1 & a_{n2}-x_ny_2 & \cdots & a_{nn}-x_ny_n \end{vmatrix} = |A| - \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij} x_i y_j \qquad (2.91)$$

この等式で，さらに(i)行列式の要素が反対称である $a_{ij}=-a_{ji}$, (ii) $x_i=y_i$ とすると，n が偶数のとき右辺の第 2 項は 0 になる.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij} y_i y_j = 0 \qquad (\because \Delta_{ij} = -\Delta_{ji})$$

したがって，n が偶数のとき，次の等式を得る(ただし $(i,j)\equiv a_{ij}$, n は偶数).

$$\begin{vmatrix} a_{11}-y_1y_1 & a_{12}-y_1y_2 & \cdots & a_{1n}-y_1y_n \\ a_{21}-y_2y_1 & a_{22}-y_2y_2 & \cdots & a_{2n}-y_2y_n \\ a_{31}-y_3y_1 & a_{32}-y_3y_2 & \cdots & a_{3n}-y_3y_n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1}-y_ny_1 & a_{n2}-y_ny_2 & \cdots & a_{nn}-y_ny_n \end{vmatrix} = |A| = (1, 2, \cdots, n)^2 \qquad (2.92)$$

[注 1]　式(2.90)の左辺は$z=1$のとき，

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となるが，この行列式は，第 1 行に $-x_i$ を掛けてそれを第 $i+1$ 行に加えるという操作を $i=1, 2, \cdots, n$ について行なうと，次の行列式に変形される.

$$
=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & a_{11}-x_1y_1 & a_{12}-x_1y_2 & \cdots & a_{1n}-x_1y_n \\ 0 & a_{21}-x_2y_1 & a_{22}-x_2y_2 & \cdots & a_{2n}-x_2y_n \\ 0 & a_{31}-x_3y_1 & a_{32}-x_3y_2 & \cdots & a_{3n}-x_3y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1}-x_ny_1 & a_{n2}-x_ny_2 & \cdots & a_{nn}-x_ny_n \end{vmatrix} \qquad \blacksquare
$$

［注 2］　式(2.92)は，反対称行列式($a_{ij}=-a_{ji}$)の要素 a_{ij} に積 y_iy_j を付け加えても同じパフィアンが得られることを意味している．このことを使って第 3 章で KP 方程式の解 τ_{KP} と BKP 方程式の解 τ_{BKP} との関係式[8] $\tau_{\mathrm{KP}}=\tau_{\mathrm{BKP}}{}^2$ を導く．▎

縁(ふち)どった行列式に対して次の等式が成立する．

$$
\begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ z_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ z_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ z_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ x_1 & b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_3 & b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & b_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & b_1c_1 & b_1c_2 & \cdots & b_1c_n \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ x_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ z_2 & b_2c_1 & b_2c_2 & \cdots & b_2c_n \\ x_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ z_3 & b_3c_1 & b_3c_2 & \cdots & b_3c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ x_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & b_nc_1 & b_nc_2 & \cdots & b_nc_n \end{vmatrix} \tag{2.93}
$$

この等式は $c_1, c_2, \cdots, c_n$ の1次式であるので，c_j $(j=1,2,\cdots)$ の係数を比較する．まず，$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ とする．このとき式(2.93)は，左辺を第1列で展開した式が右辺になるので，成立している．次に c_1 の係数を調べると

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ x_3 & b_3 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_n & b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ x_3 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_3 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ b_3 \begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots + b_n \begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_{n-1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

となる．これは左辺を第2列で展開した式である．したがって等式は成立している．同様にして任意の c_j の係数について等式が成立しているので，等式(2.93)は正しい．(証明終り)

2-7　パフィアンの恒等式

パフィアンには多彩な恒等式が存在する．最も基本的なものは，$2m$ 次のパフィアン $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2m})$ の展開式

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2m}) = \sum_{j=2}^{2m} (-1)^j (a_1, a_j)(a_2, a_3, \cdots, \hat{a}_j, \cdots, a_{2m}) \qquad (2.94)$$

に $2n$ 個の文字 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ を同次的に追加して作ったパフィアンに対する恒等式(拡張された展開式)[4)]

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2m}, 1, 2, \cdots, 2n)(1, 2, \cdots, 2n)$$
$$= \sum_{j=2}^{2m} (-1)^j (a_1, a_j, 1, 2, \cdots, 2n)(a_2, a_3, \cdots, \hat{a}_j, \cdots, a_{2m}, 1, 2, \cdots, 2n) \tag{2.95}$$

である．また値が0のパフィアン（m は奇数）

$$0 = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, 2n, 1, 1)$$

を最後の文字1で展開すると

$$= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} (a_1, a_2, a_3, \cdots, \hat{a}_j, \cdots, a_m, 2n, 1)(a_j, 1) - (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, 1)(2n, 1)$$

となる．したがって

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, 1)(1, 2n) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} (a_j, 1)(a_1, a_2, a_3, \cdots, \hat{a}_j, \cdots, a_m, 1, 2n)$$

が得られる．この場合にも，$2n-2$ 個の文字 $\{2, \cdots, 2n-1\}$ を同次的に追加すると，次の恒等式が得られる．

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, 1, 2, \cdots, 2n-1)(1, 2, \cdots, 2n)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} (a_j, 1, 2, \cdots, 2n-1)(a_1, a_2, a_3, \cdots, \hat{a}_j, \cdots, a_m, 1, 2, \cdots, 2n) \tag{2.96}$$

例えば，$m=2$ のとき式(2.95)は

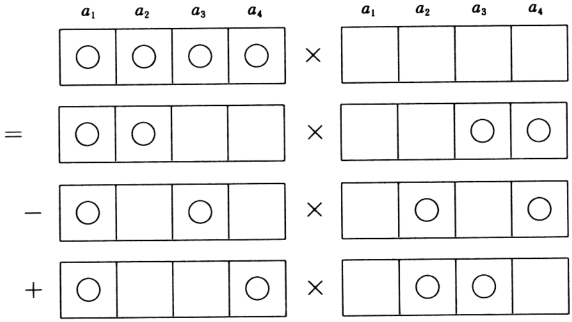
$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2, a_3, a_4, 1, 2, \cdots, 2n)(1, 2, \cdots, 2n) \\
&\quad = (a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)(a_3, a_4, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&\qquad - (a_1, a_3, 1, 2, \cdots, 2n)(a_2, a_4, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&\qquad + (a_1, a_4, 1, 2, \cdots, 2n)(a_2, a_3, 1, 2, \cdots, 2n)
\end{aligned} \tag{2.95$'$}$$

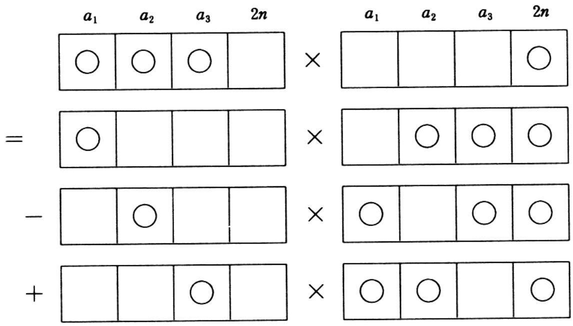
となり，$m=3$ のとき式(2.96)は

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2, a_3, 1, 2, \cdots, 2n-1)(1, 2, \cdots, 2n) \\
&\quad = (a_1, 1, 2, \cdots, 2n-1)(a_2, a_3, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&\qquad - (a_2, 1, 2, \cdots, 2n-1)(a_1, a_3, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&\qquad + (a_3, 1, 2, \cdots, 2n-1)(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)
\end{aligned} \tag{2.96$'$}$$

となる．

［注1］ 式(2.95′)と式(2.96′)をマヤ図形で表示すると，それぞれ





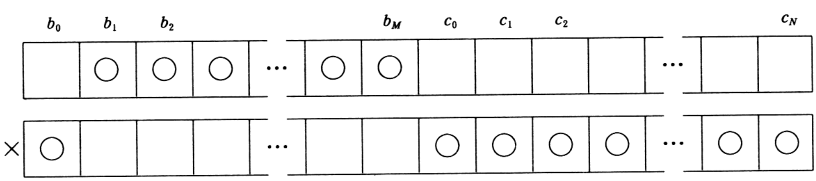
となる．▎

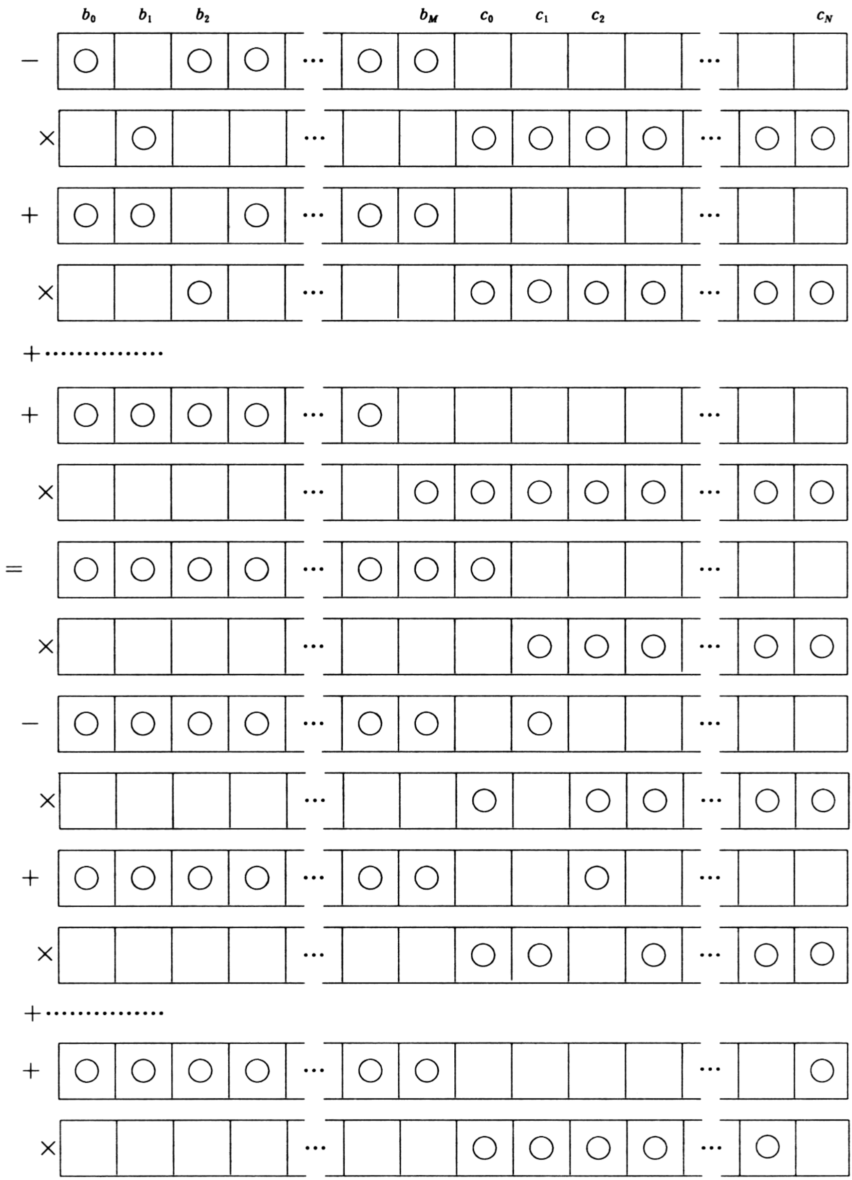
［注 2］　多種多様なソリトン方程式がこのようなパフィアンの恒等式に帰着するというのが直接法のテーマの 1 つである．▎

この節ではこれらの恒等式を証明する．最初に次の恒等式[10)]

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{M}(-1)^j(b_0, b_1, b_2, \cdots, \hat{b}_j, \cdots, b_M)(b_j, c_0, c_1, c_2, \cdots, c_N)\\
&\quad=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(b_0, b_1, b_2, \cdots, b_M, c_k)(c_0, c_1, c_2, \cdots, \hat{c}_k, \cdots, c_N)
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

(M, N は任意の偶数) が成り立つことに注意する．これをマヤ図形で表示すると，




b0 b1 b2 bM c0 c1 c2 cN
−
×
+
×
+……………
+
×
=
×
−
×
+
×
+……………
+
×

となる．証明は簡単で，左辺ではパフィアン $(b_j, c_0, c_1, c_2, \cdots, c_N)$ を最初の文字 b_j について展開し，右辺ではパフィアン $(b_0, b_1, b_2, \cdots, c_M, c_k)$ を最後の文字 c_k について展開すると，式(2.97)は

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{M}(-1)^j\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(b_0, b_1, b_2, \cdots, \hat{b}_j, \cdots, b_M)\\&\qquad\times(b_j, c_k)(c_0, c_1, c_2, \cdots, \hat{c}_k, \cdots, c_N)\\&=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\sum_{j=0}^{M}(-1)^j(b_0, b_1, b_2, \cdots, \hat{b}_j, \cdots, b_M)\\&\qquad\times(b_j, c_k)(c_0, c_1, c_2, \cdots, \hat{c}_k, \cdots, c_N)\end{aligned}$$

となるので，確かに成立している．

恒等式(2.97)の特別の場合として，$M=2n$, $N=2m+2n-2$ とし，文字 b_j と c_k を次のように選ぶ．

$$\begin{aligned}&b_0=a_1,\ \ b_1=1,\ \ b_2=2,\ \ \cdots,\ \ b_M=b_{2n}=2n\\&c_0=a_2,\ \ c_1=a_3,\ \ c_2=a_4,\ \ \cdots,\ \ c_{2m-2}=a_{2m}\\&c_{2m-1}=1,\ \ c_{2m}=2,\ \ \cdots,\ \ c_N=c_{2m+2n-2}=2n\end{aligned}$$

このように選ぶと，式(2.97)の左辺において j についての和は $j=0$ 以外は 0 になるので，左辺は

$$(1, 2, \cdots, 2n)(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2m}, 1, 2, \cdots, 2n)$$

に等しい．右辺での k についての和は

$$=\sum_{k=0}^{2m-2}(-1)^k(a_1, 1, 2, \cdots, 2n, a_{k+2})(a_2, a_3, \cdots, \hat{a}_{k+2}, \cdots, a_{2m}, 1, 2, \cdots, 2n)$$

に等しい．したがって式(2.97)は恒等式(2.95)に帰着する．（証明終り）

恒等式(2.96)は式(2.97)で，$M=2n-2$, $N=m+2n-1$（m は奇数）とし，文字 b_j と c_k を次のように選ぶと得られる．

$$\begin{aligned}&b_0=1,\ \ b_1=2,\ \ b_2=3,\ \ \cdots,\ \ b_M=b_{2n-2}=2n-1\\&c_0=a_1,\ \ c_1=a_2,\ \ c_2=a_3,\ \ \cdots,\ \ c_{m-1}=a_m\\&c_m=1,\ \ c_{m+1}=2,\ \ \cdots,\ \ c_N=c_{m+2n-1}=2n\end{aligned}$$

［注 1］　次章でソリトン方程式の双線形形式が基本的恒等式(2.95)，(2.96)に帰着することを示すが，その恒等式(2.95)，(2.96)がこんなに簡単な恒等式(2.97)から生成されるのは不思議である．▎

［注 2］ プリュッカーの関係式には射影幾何学的意味付けがある．プリュッカーの関係式を一般化した恒等式(2.97)の意味付けはいまのところまったく不明である．❙

2–8 パフィアン $(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)$ の展開式

パフィアン $(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)$ は $(a_1, a_2)=0$ のとき，次のような形(i), (ii)に展開される[4]．

（i） $(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)$

$$= \sum_{1\leq j<k\leq 2n} (-1)^{i+j-1}(a_1, a_2, j, k)(1, 2, \cdots, \hat{j}, \cdots, \hat{k}, \cdots, 2n) \tag{2.98}$$

（ii） $(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)$

$$= \sum_{j=2}^{2n}(-1)^j[(a_1, a_2, 1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n) + (1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)] \tag{2.99}$$

証明を以下に示す．展開式(i)の証明は比較的簡単で，パフィアン $(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)$ を最初文字 a_1 で展開し，次に文字 a_2 で展開すると

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n) &= \sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{i+j}(a_1, j)(a_2, k)(1, 2, \cdots, \hat{j}, \cdots, \hat{k}, \cdots, 2n)\\ &= \sum_{1\leq j<k\leq 2n}(-1)^{i+j}[(a_1, j)(a_2, k)-(a_1, k)(a_2, j)]\\ &\qquad \times(1, 2, \cdots, \hat{j}, \cdots, \hat{k}, \cdots, 2n)\end{aligned}$$

である．ここで，$(a_1, a_2)=0$ に注意すると，

$$= \sum_{1\leq j<k\leq 2n}(-1)^{i+j-1}(a_1, a_2, j, k)(1, 2, \cdots, \hat{j}, \cdots, \hat{k}, \cdots, 2n)$$

となる．(証明終り)

展開式(ii)を示すには，パフィアン $(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)$ を文字 1 で展開すればよい．

$$\begin{aligned}&(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)\\ &\quad = (1, a_1)(a_2, 2, \cdots, 2n)-(1, a_2)(a_1, 2, \cdots, 2n)\\ &\qquad + \sum_{j=2}^{2n}(-1)^j(1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)\end{aligned}$$

さらに$(a_2, 2, \cdots, 2n)$と$(a_1, 2, \cdots, 2n)$を展開すると

$$= (1, a_1)\sum_{j=2}^{2n}(-1)^j(a_2, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)$$
$$-(1, a_2)\sum_{j=2}^{2n}(-1)^j(a_1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)$$
$$+\sum_{j=2}^{2n}(-1)^j(1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)$$

である．ここで，$(a_1, a_2)=0$に注意すると，

$$= \sum_{j=2}^{2n}(-1)^j[(a_1, a_2, 1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)+(1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)]$$

である．(証明終り)

展開式(i)でパフィアン$(1, 2, \cdots, 2n)$の代わりにパフィアン$(b_1, b_2, 1, 2, \cdots, 2n)$を考えると，この展開式は次のように拡張できる[4)]．

(iii)　$(a_1, a_2, b_1, b_2, 1, 2, \cdots, 2n)$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=j+1}^{2n}(-1)^{j+k-1}(a_1, a_2, j, k)(b_1, b_2, 1, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, \hat{k}, \cdots, 2n) \tag{2.100}$$

ただし，$(a_j, b_k)=0\ (j, k=1, 2)$である．

［注］　これらの展開式はパフィアンの微分公式として後で利用する．∎

2-9　パフィアンの加法定理

特別な要素を持つ$2n$次のパフィアン

$$(1, 2, \cdots, 2n)_{\mathrm{c}}$$

を考える．このパフィアンの$(i, j)_{\mathrm{c}}$要素はパフィアンの和

$$(i, j)_{\mathrm{c}} = (i, j)+\lambda(a, b, i, j) \tag{2.101}$$

である．ここでλはパラメータで，

$$(a, b) = 0$$

である．このとき任意のnに対して次の加法公式が成り立つ．

$$(1, 2, \cdots, 2n)_{\mathrm{c}} = (1, 2, \cdots, 2n)+\lambda(a, b, 1, 2, \cdots, 2n) \tag{2.102}$$

例えば，$n=2$のとき，

$$\begin{aligned}(1,2,3,4)_c &= (1,2)_c(3,4)_c-(1,3)_c(2,4)_c+(1,4)_c(2,3)_c\\ &= [(1,2)+\lambda(a,b,1,2)][(3,4)+\lambda(a,b,3,4)]\\ &\quad -[(1,3)+\lambda(a,b,1,3)][(2,4)+\lambda(a,b,2,4)]\\ &\quad +[(1,4)+\lambda(a,b,1,4)][(2,3)+\lambda(a,b,2,3)]\\ &= (1,2,3,4)+\lambda(a,b,1,2,3,4) \qquad (2.103)\end{aligned}$$

である．

これを数学的帰納法によって証明する．$n=1$ のときは確かに成立している．いま加法公式が $2n-2$ 次の任意のパフィアンで成立したと仮定しよう．

$$(2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n)_c = (2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n)+\lambda(a,b,2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n) \qquad (2.104)$$

式(2.102)の左辺を展開すると

$$(1,2,\cdots,2n)_c = \sum_{j=2}^{2n}(-1)^j(1,j)_c(2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n)_c$$

ここで式(2.101)，(2.104)を使うと

$$\begin{aligned}&= \sum_{j=2}^{2n}(-1)^j[(1,j)+\lambda(a,b,1,j)][(2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n)\\ &\quad +\lambda(a,b,2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n)]\end{aligned}$$

である．この式で λ の 0 次の項は明らかに $(1,2,\cdots,2n)$ になる．λ の 1 次の項は前節の展開式(ii)を使うと $(a,b,1,2,\cdots,2n)$ になる．λ の 2 次の項は展開式(ii)

$$\begin{aligned}&(a,b,1,2,\cdots,2n,2n+1,2n+2)\\ &= \sum_{j=2}^{2n+2}(-1)^j[(a,b,1,j)(2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n,2n+1,2n+2)\\ &\quad +(1,j)(a,b,2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n,2n+1,2n+2)]\end{aligned}$$

で $2n+1=a$，$2n+2=b$ とおくと，

$$0 = \sum_{j=2}^{2n}(-1)^j(a,b,1,j)(2,3,\cdots,\hat{j},\cdots,2n,a,b)$$

であるので，λ の 2 次の項は 0 になる．したがって

$$(1,2,\cdots,2n)_c = (1,2,\cdots,2n)+\lambda(a,b,1,2,\cdots,2n)$$

となり，加法公式(2.102)が示された．（証明終り）

この加法定理を使うと行列式にたいする等式(2.91)

$$\det|a_{ij}-x_iy_j|_{1\leq i<j\leq 2n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.91'}$$

は次のように書き換えられる．

$$(1, 2, \cdots, n, n^*, \cdots, 2^*, 1^*)_c = (1, 2, \cdots, n, n^*, \cdots, 2^*, 1^*) + (d_0^*, d_0, 1, 2, \cdots, n, n^*, \cdots, 2^*, 1^*) \tag{2.105}$$

ここで,

$$(i, j^*)_c = (i, j^*) + (d_0^*, d_0, i, j^*) = a_{ij} - x_iy_j$$

$$(i, j^*) = a_{ij}, \quad (d_0^*, i) = x_i, \quad (d_0, j^*) = y_j$$

［注］　この加法定理はソリトン方程式の差分化のとき，パフィアンの差分公式を求めるときに有用である．▎

2-10　パフィアンの微分公式

任意の行列式 $A\equiv\det|a(j,k)|_{1\leq j,k\leq n}$ の x 微分は各行(または列)の微分の和

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum_{1\leq j,k\leq n} \frac{\partial a(j,k)}{\partial x} \Delta(j,k) \tag{2.106}$$

になる．これに対応するパフィアン $(1, 2, \cdots, 2n)$ の微分を考える．

パフィアンの (i,j) 要素を成分とする行列式

$$D \equiv \det|(i,j)|_{1\leq i<j\leq 2n} \tag{2.107}$$

の x 微分は

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \sum_{1\leq i,j\leq 2n} \frac{\partial (i,j)}{\partial x} \Delta(i,j) \tag{2.108}$$

である．D にパフィアン $(1, 2, \cdots, 2n)$ の 2 乗を，$\Delta(i,j)$ に関係式(2.68)

$$\Delta(i,j) = \Gamma(i,j)(1, 2, \cdots, 2n)$$

を代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2, \cdots, 2n) = \frac{1}{2}\sum_{1\leqq i,j\leqq 2n}\frac{\partial(i,j)}{\partial x}\Gamma(i,j)$$

$$= \sum_{1\leqq i<j\leqq 2n}\frac{\partial(i,j)}{\partial x}\Gamma(i,j) \qquad (2.109)$$

となる．これがパフィアンの微分公式である．

パフィアンの要素 (i, j) の x 微分が特別なパフィアンで表現できる場合，例えば

$$\frac{\partial(i,j)}{\partial x} = (a_0, b_0, i, j), \qquad (a_0, b_0) = 0 \qquad (2.110)$$

のとき，2–8 節の展開式(i)から

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2, \cdots, 2n) = (a_0, b_0, 1, 2, \cdots, 2n) \qquad (2.111)$$

を得る．すなわち，パフィアンの微分はパフィアンで表現される[4]．

この微分公式は反対称行列式の微分公式を経由しなくても，次のように求めることができる．パフィアンの展開式

$$(1, 2, \cdots, 2n) = \sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j-1}(1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n) \qquad (2.112)$$

を直接微分する．

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2, \cdots, 2n) = \sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j-1}\left[\frac{\partial}{\partial x}(1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)\right.$$
$$\left. +(1, j)\frac{\partial}{\partial x}(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)\right]$$

ここで数学的帰納法を使う．$n=1$ のときは展開式(2.111)は確かに成立している．展開式(2.111)が $n=n-1$ のとき成り立つことを仮定すると

$$= \sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j-1}[(a_0, b_0, 1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)$$
$$+(1, j)(a_0, b_0, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)]$$

である．2–8 節の展開式(ii)を使うと，

$$= (a_0, b_0, 1, 2, \cdots, 2n)$$

となる．したがって任意の n について展開式(2.111)が成り立つことが証明さ

れた．（証明終り）

次にパフィアン $(a_0, b_0, 1, 2, \cdots, 2n)$ の y 微分を計算する．パフィアンの要素の y 微分はいろいろな形があるが，ここでは簡単のため，例えば次式で与えられるものを考える．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(i, j) &\equiv (a_1, b_1, i, j)\\ \frac{\partial}{\partial y}(a_0, b_0, i, j) &\equiv (a_2, b_0, i, j)+(a_0, b_2, i, j)\end{aligned} \tag{2.113}$$

ただし，$(a_i, a_j)=(a_i, b_j)=(b_i, b_j)=0$ $(i, j=0, 1, 2)$ である．このとき次の微分公式が成立する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(a_0, b_0, 1, 2, \cdots, 2n) &= (a_2, b_0, 1, 2, \cdots, 2n)+(a_0, b_2, 1, 2, \cdots, 2n)\\ &\quad +(a_0, b_0, a_1, b_1, 1, 2, \cdots, 2n)\end{aligned} \tag{2.114}$$

微分公式(2.114)を示すために，2-8 節の展開式(i)

$$(a_0, b_0, 1, 2, \cdots, 2n) = \sum_{1\leq i<j\leq 2n}(-1)^{i+j-1}(a_0, b_0, j, k)(1, 2, \cdots, \hat{j}, \cdots, \hat{k}, \cdots, 2n)$$

を y で微分する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(a_0, b_0, 1, 2, \cdots, 2n) = \sum_{1\leq i<j\leq 2n}(-1)^{i+j-1}\{&[(a_2, b_0, j, k)+(a_0, b_2, i, j)]\\ &\times(1, 2, \cdots, \hat{j}, \cdots, \hat{k}, \cdots, 2n)\\ &+(a_0, b_0, j, k)(a_1, b_1, 1, \cdots, \hat{j}, \cdots, \hat{k}, \cdots, 2n)\}\end{aligned}$$

2-8 節の展開公式(ii), (iii)により，

$$\begin{aligned}&= (a_2, b_0, 1, 2, \cdots, 2n)+(a_0, b_2, 1, 2, \cdots, 2n)\\ &\quad +(a_0, b_0, a_1, b_1, 1, 2, \cdots, 2n)\end{aligned}$$

となる．（証明終り）

上の公式の応用として，次のような N 次の行列式 τ_N の微分[11]を計算しよう．

$$\begin{aligned}\tau_N &= \det|a_{ij}|_{1\leq i, j\leq N}\\ a_{ij} &\equiv c_{ij}+\int^x f_i g_j dx, \qquad c_{ij} = \text{const.}\end{aligned} \tag{2.115}$$

ここで関数 f_i, g_j $(i, j=1, 2, \cdots, N)$ は線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f_i = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n} g_j = (-1)^{n-1} \frac{\partial^n}{\partial x^n} g_j \tag{2.116}$$

を満たす．

［注］　この行列式はKP方程式のN-ソリトン解τ_Nの1つの表現形式[11]である．▎

行列式τ_Nの微分計算はソリトン理論で最も重要な計算であるので，行列式の微分公式を使った計算法とパフィアンを使った計算法を並列して述べる．

行列式の微分公式

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial x} = \sum_{1 \leq j, k \leq N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \Delta(j, k) \tag{2.117}$$

から

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial x} = \sum_{1 \leq j, k \leq N} f_j g_k \Delta(j, k) \tag{2.118}$$

となるが，これは縁どった行列式の展開公式(2.90)

$$\begin{vmatrix} z & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| z - \sum_{i,k=1}^{n} \Delta_{ij} x_i y_j$$

で$z=0$と置いた式である．したがって

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial x} = - \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_N \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_N & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \tag{2.119}$$

となる．

さて2–3節でn次の行列式は$2n$次のパフィアンで表現できることを注意したが，これを利用してτ_Nをパフィアンで表現しよう．パフィアンの成分を

$$
\begin{aligned}
&(i, j^*) = a_{ij} \equiv c_{ij} + \int^x f_i g_j dx \\
&(i, j) = (i^*, j^*) = 0
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

で定義すると，τ_Nは次のように表現される．

$$\tau_N = (1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \tag{2.121}$$

パフィアンの要素(i, j^*)のx微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial (i, j^*)}{\partial x} &= f_i g_j \\
&= (d_0, d_0{}^*, i, j^*)
\end{aligned}
\tag{2.122}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
&(d_n, j^*) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} g_j, \qquad (d_m, d_n{}^*) = 0 \\
&(d_n{}^*, i) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i, \qquad (d_n, i) = (d_m{}^*, i^*) = 0
\end{aligned}
\tag{2.123}
$$

$m, n = 0, 1, 2, \cdots$である．このパフィアンはロンスキアンを表現するときに使ったものと同じような性質をもっている．

したがってパフィアンの微分公式(2.111)から

$$\frac{\partial}{\partial x}\tau_N = (d_0, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \tag{2.124}$$

となる．この結果は次のような行列式に等しい．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\tau_N &= (d_0, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*, d_0{}^*) \\
&= \begin{vmatrix} (d_0, d_0{}^*) & (d_0, 1^*) & \cdots & (d_0, N^*) \\ (1, d_0{}^*) & (1, 1^*) & \cdots & (1, N^*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (N, d_0{}^*) & (N, 1^*) & \cdots & (N, N^*) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_N \\ -f_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ -f_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ -f_N & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \tag{2.125}
$$

これは行列式による τ_N の微分と同じ結果である.

次に τ_N の x による 2 回微分 τ_{Nxx} を計算する. $\partial a_{ij}/\partial x = f_i g_j$ に注意すると, 行列式の性質より,

$$
\tau_{Nxx} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_N \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_N & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & g_{3x} & \cdots & g_{Nx} \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_N & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
$$

$$
- \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_N \\ f_{1x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_N & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
$$

$$
- \cdots
$$

$$
- \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_N \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_{Nx} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

を得る．縁どった行列式の展開式(2.93)を使うと，第2項以後はまとめられて1つの行列式となり，結局次の微分公式を得る．

$$\tau_{Nxx} = -\begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & g_{3x} & \cdots & g_{Nx} \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_N & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_N \\ f_{1x} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2x} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3x} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_{Nx} & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \tag{2.126}$$

一方，パフィアンでは，まず要素の微分を計算する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(d_0, d_0{}^*, i, j^*) &= \frac{\partial}{\partial x}(f_i g_j) \\ &= f_{ix} g_j + f_i g_{jx} \\ &= (d_1, d_0{}^*, i, j^*) + (d_0, d_1{}^*, i, j^*) \end{aligned}$$

となるので，2-8節の展開式(i)を使って

$$\begin{aligned} \tau_{Nxx} &= \frac{\partial}{\partial x}(d_0, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &= (d_1, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad + (d_0, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \end{aligned}$$

となる．この結果を行列式で表現すると，

$$\tau_{Nxx} = \begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & g_{3x} & \cdots & g_{Nx} \\ -f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ -f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ -f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ -f_N & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_N \\ -f_{1x} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ -f_{2x} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ -f_{3x} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ -f_{Nx} & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \tag{2.126$'$}$$

となり，行列式による結果と一致している．

同様の計算を続けると，τ_N の x による4回微分 τ_{Nxxxx} は

$$\frac{\partial^4 \tau_N}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ -\begin{vmatrix} 0 & g_{1xx} & g_{2xx} & g_{3xx} & \cdots & g_{Nxx} \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_N & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \right.$$

$$-2\begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & g_{3x} & \cdots & g_{Nx} \\ f_{1x} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2x} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3x} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_{Nx} & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

$$\left. -\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_N \\ f_{1xx} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2xx} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3xx} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_{Nxx} & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \right\}$$

であるが，縁どった行列式の等式(2.93)から

$$\begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & \cdots & g_{Nx} \\ f_{1xx} & f_1 g_1 & f_1 g_2 & \cdots & f_1 g_N \\ f_{2x} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3x} & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_{Nx} & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & \cdots & g_{Nx} \\ f_{1x} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2xx} & f_2 g_1 & f_2 g_2 & \cdots & f_2 g_N \\ f_{3x} & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_{Nx} & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & \cdots & g_{Nx} \\ f_{1x} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2x} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3x} & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_{Nxx} & f_N g_1 & f_N g_2 & \cdots & f_N g_N \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & \cdots & g_{Nx} \\ f_{1xx} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2xx} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3xx} & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_{Nxx} & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_{1x} & g_{2x} & \cdots & g_{Nx} \\ 0 & 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_N \\ f_{1x} & f_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2x} & f_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3x} & f_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_{Nx} & f_N & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
$$

となるので，次式を得る．

$$
\frac{\partial^4 \tau_N}{\partial x^4} = - \begin{vmatrix} 0 & g_{1xxx} & g_{2xxx} & g_{3xxx} & \cdots & g_{Nxxx} \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_N & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
$$

$$
-3 \begin{vmatrix} 0 & g_{1xx} & g_{2xx} & g_{3xx} & \cdots & g_{Nxx} \\ f_{1x} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2x} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3x} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_{Nx} & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
$$

$$
+2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_{1x} & g_{2x} & \cdots & g_{Nx} \\ 0 & 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_N \\ f_{1x} & f_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2x} & f_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3x} & f_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_{Nx} & f_N & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
$$

$$
-3 \begin{vmatrix} 0 & g_{1x} & g_{2x} & g_{3x} & \cdots & g_{Nx} \\ f_{1xx} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2xx} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3xx} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_{Nxx} & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}
$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_N \\ f_{1xxx} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ f_{2xxx} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ f_{3xxx} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ f_{Nxxx} & a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \tag{2.127}$$

となる.

同じことをパフィアンで計算する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \tau_N}{\partial x^4} &= \frac{\partial}{\partial x}[(d_2, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad +2(d_1, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad +(d_0, d_2{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)] \\ &= (d_3, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad +3(d_2, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad +2(d_0, d_0{}^*, d_1, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad +3(d_1, d_2{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad +(d_0, d_3{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \end{aligned} \tag{2.127'}$$

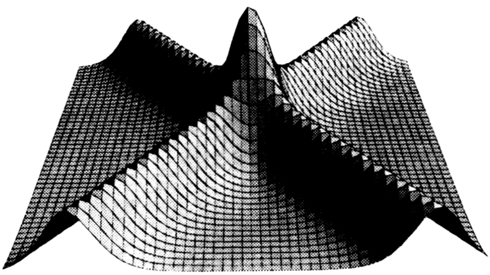
となる. これは行列式による計算結果と一致している.

［注］ 以上のように, 行列式の微分に比べて, パフィアンによる微分の方が簡明である. しかし, パフィアンに馴れていない人のために, まず行列式による計算法を示し, その後でパフィアンによる微分を示した. ▎

3

ソリトン方程式の構造

正面衝突



3-0 はじめに

数多くあるソリトン方程式の中で KP (Kadomtsev–Petviashvili) 方程式が最も基本的な方程式であることを最初に見抜いたのは佐藤幹夫[1]である．佐藤は双線形 KP 方程式の多項式解が一般線形群の特性多項式 (character polynomials) であることを発見した．その後，擬微分作用素 (pseudodifferential operator) による KP 方程式系のラックス対 (Lax pair) の生成をへて最終的に「KP 方程式はグラスマン (Grassmann) 多様体中の点の運動であり，双線形方程式はプリュッカーの関係式に他ならない」という結論に到達した．一方，薩摩順吉は佐藤より前に KdV 方程式のソリトン解はロンスキアンで表現できることを発見している[2]．その後 1983 年フリーマンとニンモ[3]は KP 方程式のソリトン解をロンスキアンで表現すると，双線形 KP 方程式は行列式の恒等式に帰着することを見つけた．ここではこれらの結果を発展させて，ソリトン解をパフィアン (行列式を含む) で表現すると，双線形ソリトン方程式はパフィアンの恒等式に他ならないことを示す．

［注］ KdV 方程式は浅い水の波を記述する 1+1 次元の方程式である．KP 方程式は KdV ソリトンに横方向(進行方向に対して)の摂動を加えた場合の安定性を議論するために提出されたものである[4]．KP 方程式がソリトン方程式の中で最も基本的な方程式であるといわれると，物理を知っている人は反対するに違いない．水の波を記述する流体力学から，ある近似のもとに導き出されたものが KdV 方程式である．さらに横方向の変動が小さいという仮定を使って得られたものが KP 方程式であるので，KP 方程式は物理学の基本方程式から程遠い位置にある．しかし，ここで問題にしているのは物理学的な観点ではなく，数学的な観点である．以下にみられるような KP 方程式の解が示す数学的な構造の簡明さと，それゆえに生じる他のソリトン方程式との関連という点で基本的なのである．❙

3-1　KP 方程式の構造 (i) ロンスキアン表示

KP (Kadomtsev–Petviashvili) **方程式**は次のような 2+1 次元(空間 2 次元 (x, y) + 時間 1 次元 t)の非線形偏微分方程式である．

$$(u_t+u_{xxx}+6uu_x)_x+u_{yy} = 0 \tag{3.1}$$

y 微分の項を無視すると，KdV 方程式に帰着するので，2 次元 KdV 方程式ともよばれている．

まず解のロンスキアン表現を与え，次に KP 方程式がどのようにプリュッカーの関係式に帰着するのかを見る．KP 方程式はスケール変換によって

$$(-4u_t+u_{xxx}+6uu_x)_x+3u_{yy} = 0 \tag{3.2}$$

となる．独立変数 t, x, y のスケールをこのように選んだ理由はあとで分かる．この式で従属変数 u を

$$u = 2(\log\tau)_{xx} \tag{3.3}$$

と対数変換すると，次の双線形方程式になる．

$$(D_1{}^4-4D_1D_3+3D_2{}^2)\tau\cdot\tau = 0 \tag{3.4}$$

ここで，座標 t, x, y を

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad t = x_3$$

で表わし,

$$D_x = D_1, \quad D_y = D_2, \quad D_t = D_3$$

と略記した．ここで積分定数は 0 に選んでいる．

第 1 章の方法に従って，摂動計算により 2–ソリトン解を求めると,

$$\tau_2 = 1+\exp(\eta_1)+\exp(\eta_2)+a_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \tag{3.5}$$

$$\eta_i = P_i x_1 + Q_i x_2 + \Omega_i x_3 + \eta_0$$

分散関係は

$$P_i^{\,4} - 4P_i\Omega_i + 3Q_i^{\,2} = 0 \qquad (i=1,2) \tag{3.6}$$

位相のずれ (phase shift) は

$$a_{12} = -\frac{(P_1-P_2)^4-4(P_1-P_2)(\Omega_1-\Omega_2)+3(Q_1-Q_2)^2}{(P_1+P_2)^4-4(P_1+P_2)(\Omega_1+\Omega_2)+3(Q_1+Q_2)^2} \tag{3.7}$$

となる．

N–ソリトン解は，$a_{ij}=\exp(A_{ij})$ とおくと,

$$\tau_N = \sum \exp\left[\sum_{i=1}^{N}\mu_i\eta_i + \sum_{i<j}^{(N)} A_{ij}\mu_i\mu_j\right] \tag{3.8}$$

と表現される．ここで $\sum$ は $\mu_1=0, 1$, $\mu_2=0, 1, \cdots$, $\mu_N=0, 1$ のすべての組合せについての和を，$\sum\limits_{i<j}^{(N)}$ は N 個の中から (条件 $i<j$ のもとで) 選んだすべてのペアについての和を意味する．

［注］ KP 方程式の N–ソリトン解 τ_N は薩摩[5]によって求められたが，その証明は KdV 方程式の場合に比べて非常に複雑である．それが不思議なことに，解 τ_N をロンスキアンで表現し「双線形方程式は行列式の等式 (プリュッカーの関係式) である」との観点に立つと，KP 方程式の N–ソリトン解の証明の方が KdV 方程式の場合に比べてずっと簡単になる．以下で N–ソリトン解のロンスキアン表現やグラミアン表現 (3–2 節) について述べる．▎

まず新しいパラメータ $p_i, q_i\,(i=1,2,\cdots)$ を次式で導入する[6]．

$$P_i = p_i - q_i$$

$$Q_i = p_i^{\,2} - q_i^{\,2} \tag{3.9}$$

$$\Omega_i = p_i^{\ 3} - q_i^{\ 3}$$

このパラメータを使うと，分散関係は

$$\begin{aligned} P_i^{\ 4} - 4P_i\Omega_i + 3Q_i^{\ 2} &= (p_i - q_i)^4 - 4(p_i - q_i)(p_i^{\ 3} - q_i^{\ 3}) + 3(p_i^{\ 2} - q_i^{\ 2})^2 \\ &= 0 \qquad (i=1, 2, \cdots) \end{aligned} \tag{3.10}$$

となって自動的に満たされている．位相のずれは

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\frac{(P_1 - P_2)^4 - 4(P_1 - P_2)(\Omega_1 - \Omega_2) + 3(Q_1 - Q_2)^2}{(P_1 + P_2)^4 - 4(P_1 + P_2)(\Omega_1 + \Omega_2) + 3(Q_1 + Q_2)^2} \\ &= \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)} \end{aligned} \tag{3.11}$$

となって非常に簡単になる．こうなるように t, x, y のスケールを選んである．つぎに η_i を書き換える．

$$\begin{aligned} \eta_i &= P_i x_1 + Q_i x_2 + \Omega_i x_3 + \text{const.} \\ &= \xi_i - \hat{\xi}_i \end{aligned} \tag{3.12}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \xi_i &= p_i x_1 + p_i^{\ 2} x_2 + p_i^{\ 3} x_3 + \text{const.} \\ \hat{\xi}_i &= q_i x_1 + q_i^{\ 2} x_2 + q_i^{\ 3} x_3 + \text{const.} \end{aligned}$$

である．これらの記号によって

$$\begin{aligned} \tau_2 = {} & 1 + \exp(\xi_1 - \hat{\xi}_1) + \exp(\xi_2 - \hat{\xi}_2) \\ & + \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)} \exp(\xi_1 + \xi_2 - \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

となる．

　さて，関数 f_1, f_2

$$\begin{aligned} f_1 &= \exp(\xi_1) + \exp(\hat{\xi}_1) \\ f_2 &= \exp(\xi_2) + \exp(\hat{\xi}_2) \end{aligned} \tag{3.14}$$

ここで

$$\begin{aligned} \xi_i &= p_i x_1 + p_i^{\ 2} x_2 + p_i^{\ 3} x_3 + \text{const.} \\ \hat{\xi}_i &= q_i x_1 + q_i^{\ 2} x_2 + q_i^{\ 3} x_3 + \text{const.} \end{aligned}$$

から作られるロンスキアンを考えよう．

$$
\begin{aligned}
Wr(f_1, f_2) &\equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_{1,x} \\ f_2 & f_{2,x} \end{vmatrix} \\
&= [\exp(\xi_1)+\exp(\hat{\xi}_1)][p_2 \exp(\xi_2)+q_2 \exp(\hat{\xi}_2)] \\
&\quad -[p_1 \exp(\xi_1)+q_1 \exp(\hat{\xi}_1)][\exp(\xi_2)+\exp(\hat{\xi}_2)] \\
&= (p_2-p_1)\exp(\xi_1+\xi_2)+(q_2-p_1)\exp(\xi_1+\hat{\xi}_2) \\
&\quad +(p_2-q_1)\exp(\hat{\xi}_1+\xi_2)+(q_2-q_1)\exp(\hat{\xi}_1+\hat{\xi}_2)
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

ここで $x_1=x$ と略記した.

双線形方程式の解 τ は変換($c_0, c_1, c_2, \cdots$ を定数として)

$$
\tau \to c_0 \exp(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\cdots)\tau \tag{3.16}
$$

に対して不変であることに注意して, 因子 $(q_2-q_1)\exp(\hat{\xi}_1+\hat{\xi}_2)$ を括り出すと

$$
\begin{aligned}
Wr(f_1, f_2) &= (q_2-q_1)\exp(\hat{\xi}_1+\hat{\xi}_2) \\
&\quad \times\Bigg[1+\frac{(q_2-p_1)}{(q_2-q_1)}\exp(\xi_1-\hat{\xi}_1) \\
&\qquad +\frac{(p_2-q_1)}{(q_2-q_1)}\exp(\xi_2-\hat{\xi}_2) \\
&\qquad +\frac{(p_2-p_1)}{(q_2-q_1)}\exp(\xi_1+\xi_2-\hat{\xi}_1-\hat{\xi}_2)\Bigg]
\end{aligned}
$$

となる. ここで位相因子(phase factor) δ_i, $\hat{\delta}_i$ を関係式

$$
\begin{aligned}
\frac{(q_2-p_1)}{(q_2-q_1)}\exp(\xi_1-\hat{\xi}_1) &= \exp(\xi_1+\delta_1-\hat{\xi}_1-\hat{\delta}_1) \\
\frac{(p_2-q_1)}{(q_2-q_1)}\exp(\xi_2-\hat{\xi}_2) &= \exp(\xi_2+\delta_2-\hat{\xi}_2-\hat{\delta}_2)
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

によって導入し, さらに次の置き換えを行なう.

$$
\begin{aligned}
\xi_i+\delta_i &\to \xi_i \\
\hat{\xi}_i+\hat{\delta}_i &\to \hat{\xi}_i
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

この結果, $Wr(f_1, f_2)$ は trivial factor(つまらない因子)を除くと,

$$
\begin{aligned}
Wr(f_1, f_2) &\propto 1+\exp(\xi_1-\hat{\xi}_1)+\exp(\xi_2-\hat{\xi}_2) \\
&\quad +\frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)}\exp(\xi_1+\xi_2-\hat{\xi}_1-\hat{\xi}_2)
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

となる．これは摂動計算で求めた2–ソリトン解 τ_2 である．

この結果を一般化すると次のような，N–ソリトン解 τ_N に対する N 次のロンスキアンの表現[1),3)]が予想される．

$$\tau_N = \begin{vmatrix} f_1^{(0)} & f_1^{(1)} & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ f_2^{(0)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_2^{(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N^{(0)} & f_N^{(1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \tag{3.20}$$

ここで

$$f_i^{(m)} \equiv \frac{\partial^m f_i}{\partial x^m} \tag{3.21}$$

ただし，$f_i (i=1,2,\cdots)$ は次の微分方程式

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_m} = \frac{\partial^m f_i}{\partial x^m} \qquad (m=1,2,3,\cdots) \tag{3.22}$$

を満たしているとする．

この予想を確かめるには，τ_N が双線形方程式

$$\begin{aligned}(D_1{}^4 - 4D_1D_3 + 3D_2{}^2)\tau\cdot\tau \\ &= 2[\tau_{xxxx}\tau - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3\tau_{xx}{}^2 - 4(\tau_{x3,x}\tau - \tau_{x3}\tau_x) + 3(\tau_{x2,x2}\tau - \tau_{x2}{}^2)] \\ &= 2[(\tau_{xxxx} - 4\tau_{x3,x} + 3\tau_{x2,x2})\tau - 4(\tau_{xxx} - \tau_{x3})\tau_x + 3(\tau_{xx} - \tau_{x2})(\tau_{xx} + \tau_{x2})] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

を満たすことを示せばよい[3)]．

ロンスキアン τ_N

$$\tau_N = \begin{vmatrix} f_1^{(0)} & f_1^{(1)} & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ f_2^{(0)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_2^{(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N^{(0)} & f_N^{(1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}$$

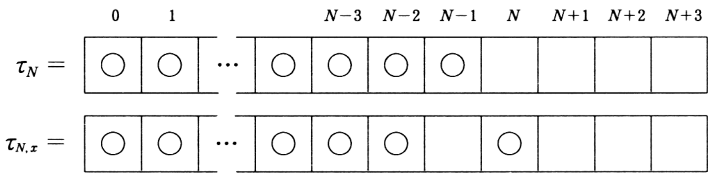
を x で微分すると，各列の微分の和になる．しかし第1列の微分は第2列に等しく，第2列の微分は第3列に等しく，…，結局最後の列の微分だけが残る．すなわち

$$\tau_{N,x} = \begin{vmatrix} f_1^{(0)} & f_1^{(1)} & \cdots & f_1^{(N-2)} & f_1^{(N)} \\ f_2^{(0)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_2^{(N-2)} & f_2^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N^{(0)} & f_N^{(1)} & \cdots & f_N^{(N-2)} & f_N^{(N)} \end{vmatrix} \tag{3.24}$$

である．これが τ_N をロンスキアンで表現したことの利点である．τ_N を微分すると，各列の微分の回数が変化するだけで，行は変化しない．したがって，行は省略して次のように略記できる．

$$\begin{aligned} \tau_N &= [0, 1, \cdots, N-1] = \tau \\ \tau_{N,x} &= [0, 1, \cdots, N-2, N] \end{aligned} \tag{3.25}$$

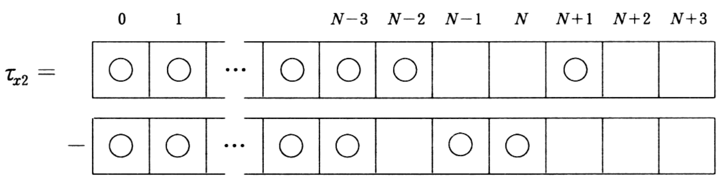
この表現をさらに簡略化して次の図形に置き換える[7]．



この図形は佐藤幹夫によって導入されたもので，マヤ図形と呼ばれている．この図形で τ_N は物理でいうフェルミ粒子がセル $0, 1, 2, \cdots, N-2, N-1$ に詰まっている真空状態を表現している．$\tau_{N,x}$ はセル $N-1$ を占めていた粒子がセル N に励起した状態を表現している．τ_N を x_2 で微分すると，$f_{i,x2}=f_{i,xx}$ に注意して，

$$\begin{aligned} \tau_{x2} &= [0, 1, \cdots, N-3, N-2, N+1] + [0, 1, \cdots, N-3, N, N-1] \\ &= [0, 1, \cdots, N-3, N-2, N+1] - [0, 1, \cdots, N-3, N-1, N] \end{aligned} \tag{3.26}$$

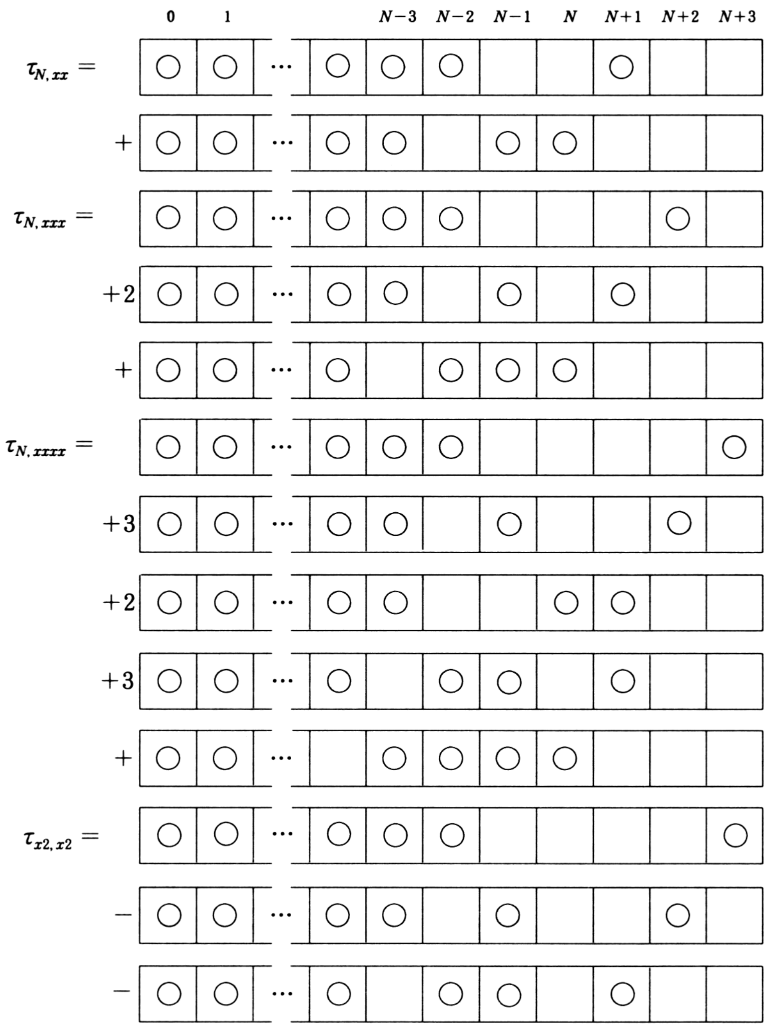
を得る．マヤ図形では



である．

［注］ フェルミ粒子は1個のセルの中にはただ1個の粒子しか入れない．このことと行列式で同じ大きさの列が2個あると行列式の値が0になることが対応している．❙

τ_N の高次微分は以下のようなフェルミ粒子の励起状態としてマヤ図形で表現される[7]．



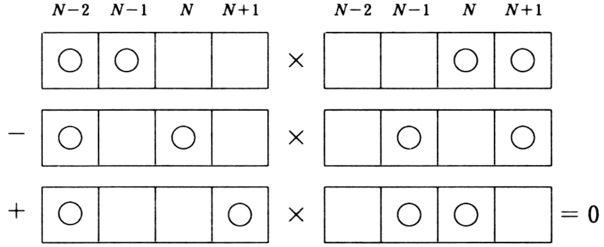
	0	1			$N-3$	$N-2$	$N-1$	N	$N+1$	$N+2$	$N+3$
$+2$	○	○	…	○	○			○	○		
$+$	○	○	…		○	○	○	○			
$\tau_{x3}=$	○	○	…	○	○	○				○	
$-$	○	○	…	○	○		○		○		
$+$	○	○	…	○		○	○	○			
$\tau_{x3,x}=$	○	○	…	○	○	○					○
$-$	○	○	…	○	○			○	○		
$+$	○	○	…		○	○	○	○			

これらの結果をまとめると，

	$N-2$	$N-1$	N	$N+1$
$\tau=$	○	○		
$\tau_x=$	○		○	
$\tau_{xx}-\tau_{x2}=\ 2$		○	○	
$\tau_{xx}+\tau_{x2}=\ 2$	○			○
$\tau_{xxx}-\tau_{x3}=\ 3$		○		○
$\tau_{xxxx}-4\tau_{x3,x}+3\tau_{x2,x2}=\ 12$			○	○

となる．ここでマヤ図形すべてに共通するセルの表示は省略した．

これを双線形のKP方程式に代入すると



と表現される．これは行列式に対する恒等式プリュッカーの関係式[1] (2–4 節)である．したがって τ は双線形KP方程式を満たす．（証明終り）

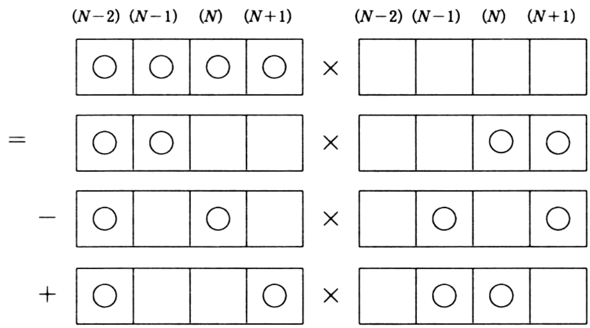
［注1］ ここでは τ に対するロンスキアン表示を使ったが，(2.29)式で示したように，ロンスキアンはパフィアンで表現される．

$$\tau = (d_0, d_1, d_2, \cdots, d_{N-1}, 1, 2, \cdots, N)$$

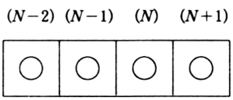
$$(d_n, j) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_j, \qquad (d_m, d_n) = 0 \tag{3.27}$$

$$(j=1, 2, \cdots, N, \quad m, n=0, 1, \cdots)$$

このパフィアン表示を使うと，双線形KP方程式に対するパフィアンの恒等式は次のマヤ図形で表わされる(セルの上の文字(N)は文字 d_N に対応している)．



しかし，この恒等式の左辺の項



$$= (d_0, d_1, d_2, \cdots, d_{N-1}, d_N, d_{N+1}, 1, 2, \cdots, N)$$

は微分を示す文字 d_m の数が関数 f_j を示す文字 j の数より多いので，関係式

$$(d_m, d_n) = 0 \tag{3.28}$$

によって 0 になる．このためパフィアンの恒等式はプリュッカーの関係式に帰着する． |

［注 2］　関数 $f_i\,(i=1, 2, \cdots)$ が次の線形微分方程式

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_m} = \frac{\partial^m f_i}{\partial x^m} \qquad (m=1, 2, 3, \cdots) \tag{3.29}$$

を満たしていることのみを使って，τ が KP 方程式の解であることを証明した．したがって f_i は微分方程式の解であれば何でもよい．例えば指数関数型の

$$f = \exp(\xi), \qquad \xi = px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 + \cdots$$

を p で任意回数微分して作られる関数(この中には群論で有名な指標多項式も含まれる[1])も解になることを注意したい． |

［注 3］　ここで求められた τ は KP 方程式だけではなく，次のような一連の高次 KP 方程式(the KP hierarchy)[8]も同時に満足している．

$$\begin{aligned}
&({D_1}^4 - 4D_1D_3 + 3{D_2}^2)\tau\cdot\tau = 0 \\
&[({D_1}^3 + 2D_3)D_2 - 3D_1D_4]\tau\cdot\tau = 0 \\
&({D_1}^6 - 20{D_1}^3D_3 - 80{D_3}^2 + 144D_1D_5 - 45{D_1}^2{D_2}^2)\tau\cdot\tau = 0 \\
&({D_1}^6 + 4{D_1}^3D_3 - 32{D_3}^2 - 9{D_1}^2{D_2}^2 + 36D_2D_4)\tau\cdot\tau = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{3.30}$$

|

［注 4］　マヤ図形とヤング図形との対応を使うと，上のプリュッカーの関係式は次のヤング図形で表わされる．

$$\tau_{\varnothing}\tau_{\tiny\yng(2,2)} - \tau_{\tiny\yng(1)}\tau_{\tiny\yng(2,1)} + \tau_{\tiny\yng(2)}\tau_{\tiny\yng(1,1)} = 0$$

|

この節の結論として，KP 方程式

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0 \tag{3.31}$$

は，従属変数 u の対数変換

$$u = 2(\log\tau)_{xx} \tag{3.32}$$

によって，双線形方程式

$$(D_1{}^4 - 4D_1D_3 + 3D_2{}^2)\tau\cdot\tau = 0 \tag{3.33}$$

に書き直せるが，解 τ をロンスキアンで表現すると，双線形方程式はプリュッカーの関係式に帰着し，それは結局，上のヤング図形で表現されるのである．この事実を最初に発見したのは佐藤[1]である．

3-2　KP 方程式の構造 (ii) グラミアン表示

双線形方程式

$$(D_1{}^4 - 4D_1D_3 + 3D_2{}^2)\tau\cdot\tau = 0 \tag{3.34}$$

は，解をロンスキアン表示するとプリュッカーの関係式に帰着することを示したが，解の表示法を変えると，この双線形方程式は行列式にたいする別の恒等式「ヤコビの等式」に帰着する[9]ことを示そう．

KP 方程式の 2–ソリトン解 τ_2 は

$$\begin{aligned}\tau_2 &= 1 + \exp(\xi_1 - \hat{\xi}_1) + \exp(\xi_2 - \hat{\xi}_2)\\ &\quad + \frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)}\exp(\xi_1+\xi_2-\hat{\xi}_1-\hat{\xi}_2)\\ \xi_i &= p_ix_1 + p_i{}^2x_2 + p_i{}^3x_3 + \text{const.}\\ \hat{\xi}_i &= q_ix_1 + q_i{}^2x_2 + q_i{}^3x_3 + \text{const.}\end{aligned} \tag{3.35}$$

と書けることを示した．ここで，位相因子 $\delta_i, \hat{\delta}_j$

$$\exp(\xi_i - \hat{\xi}_j) = \frac{1}{p_i - q_j}\exp(\xi_i + \delta_i - \hat{\xi}_j - \hat{\delta}_j) \tag{3.36}$$

を導入し，さらに置き換え

$$\begin{aligned}\xi_i + \delta_i &\to \xi_i\\ \hat{\xi}_j + \hat{\delta}_j &\to \hat{\xi}_j\end{aligned} \tag{3.37}$$

を行なうと，τ_2 は

$$\begin{aligned}\tau_2 &= 1 + \frac{1}{p_1-q_1}\exp(\xi_1 - \hat{\xi}_1) + \frac{1}{p_2-q_2}\exp(\xi_2-\hat{\xi}_2)\\ &\quad + a_{12}\exp(\xi_1 - \hat{\xi}_1 + \xi_2 - \hat{\xi}_2)\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$a_{12} \equiv \frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)(p_1-q_1)(p_2-q_2)}$$

となるが，これは次の2行2列の行列式の値に等しい.

$$\tau_2 = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{p_1-q_1}\exp(\xi_1-\hat{\xi}_1) & \dfrac{1}{p_1-q_2}\exp(\xi_1-\hat{\xi}_2) \\ \dfrac{1}{p_2-q_1}\exp(\xi_2-\hat{\xi}_1) & 1+\dfrac{1}{p_2-q_2}\exp(\xi_2-\hat{\xi}_2) \end{vmatrix} \tag{3.39}$$

この式は

$$\begin{aligned} &\tau_2 = \det|a_{ij}|_{1\leqq i,j\leqq 2} \\ &a_{ij} \equiv \delta_{ij}+\int^x \exp(\xi_i-\hat{\xi}_j)dx \qquad (x=x_1) \end{aligned} \tag{3.40}$$

とも表現できる.

［注］ 積分の下限は $x=-\infty$ (関数 $\exp(\xi_i-\hat{\xi}_j)$ が0になるような x の値)を選ぶが，これは本質的な制約ではない．あとで分かるようにクロネッカーのデルタ δ_{ij} の代わりに c_{ij} (定数)を選んでも τ が双線形KP方程式の解になることが示されるので，積分の下限は任意に選んでも結果は変わらない. ▎

関数 $\exp(\xi_i)$ と関数 $\exp(-\hat{\xi}_j)$ は，次の線形微分方程式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_n}\exp\xi_i = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\exp\xi_i \\ &\frac{\partial}{\partial x_n}\exp(-\hat{\xi}_j) = (-1)^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\exp(-\hat{\xi}_j) \end{aligned} \tag{3.41}$$

を満たしていることに注意すると，KP双線形方程式の N-ソリトン解 τ_N にたいして次のような N 次の行列式が予想される[9].

$$\tau_N = \det|a_{ij}|_{1\leqq i,j\leqq N} \tag{3.42a}$$

$$a_{ij} \equiv c_{ij}+\int^x f_i g_j dx, \qquad c_{ij} = \text{const.} \tag{3.42b}$$

ここで関数 f_i, g_j $(i,j=1,2,\cdots,N)$ は線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f_i = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i \tag{3.42c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n} g_j = (-1)^{n-1} \frac{\partial^n}{\partial x^n} g_j \tag{3.42d}$$

を満たす.

［注］ **グラミアン**(Gramian, グラムの行列式)は次のような成分をもつ行列式 G である.

$$\begin{aligned} G &\equiv \det|g_{ij}|_{1\leqq i,j\leqq N} \\ g_{ij} &\equiv \int_a^b f_i f_j dx \end{aligned} \tag{3.43}$$

この行列式に τ_N の表現が似ているので, 以後式(3.42)による τ_N の表示をグラミアン表示とよぶことにする. ▎

この τ_N が双線形方程式

$$\begin{aligned} &(D_1{}^4 - 4D_1D_3 + 3D_2{}^2)\tau\cdot\tau \\ &= 2[\tau_{xxxx}\tau - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3\tau_{xx}{}^2 - 4(\tau_{x3,x}\tau - \tau_{x3}\tau_x) + 3(\tau_{x2,x2}\tau - \tau_{x2}{}^2)] \\ &= 2[(\tau_{xxxx} - 4\tau_{x3,x} + 3\tau_{x2,x2})\tau - 4(\tau_{xxx} - \tau_{x3})\tau_x + 3(\tau_{xx} - \tau_{x2})(\tau_{xx} + \tau_{x2})] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

を満たすことを示すために, 行列式 τ_N の微分[9]を計算する. τ_N をパフィアンで表現すると

$$\tau_N = (1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \tag{3.45}$$

$$(i, j^*) = c_{ij} + \int^x f_i g_j dx, \qquad c_{ij} = \text{const.}$$

$$(i, j) = (i^*, j^*) = 0$$

となる. 次のようなパフィアン($m, n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ にたいして)を導入する.

$$\begin{aligned} (d_n, j^*) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} g_j, \qquad (d_m, d_n{}^*) = 0 \\ (d_n{}^*, i) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i, \qquad (d_n, i) = (d_m{}^*, i^*) = 0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

このパフィアンによって，要素 $a_{ij}=(i, j^*)$ の微分は次のようなパフィアンで表現される.

$$\frac{\partial}{\partial x}a_{ij} = f_i g_j = (d_0, d_0{}^*, i, j^*)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}a_{ij} &= \int^x (f_{ixx}g_j - f_i g_{jxx})dx \\ &= f_{ix}g_j - f_i g_{jx} \\ &= -(d_1, d_0{}^*, i, j^*) + (d_0, d_1{}^*, i, j^*)\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_3}a_{ij} &= \int^x (f_{ixxx}g_j + f_i g_{jxxx})dx \\ &= f_{ixx}g_j - f_{ix}g_{jx} + f_i g_{jxx} \\ &= (d_2, d_0{}^*, i, j^*) - (d_1, d_1{}^*, i, j^*) + (d_0, d_2{}^*, i, j^*)\end{aligned}$$

したがって 2-10 節の結果により，

$$\frac{\partial}{\partial x}\tau_N = (d_0, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_N &= \frac{\partial}{\partial x}(d_0, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &= (d_1, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad + (d_0, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_N}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}(1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &= -(d_1, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad + (d_0, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_N}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3}(1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &= (d_2, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad - (d_1, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*) \\ &\quad + (d_0, d_2{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \tau_N}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}[(d_1, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

$$
\begin{aligned}
&+(d_0, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)]\\
&=(d_2, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+2(d_1, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+(d_0, d_2{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4\tau_N}{\partial x^4} &= \frac{\partial}{\partial x}[(d_2, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+2(d_1, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+(d_0, d_2{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)]\\
&=(d_3, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+3(d_2, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+2(d_0, d_0{}^*, d_1, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+3(d_1, d_2{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+(d_0, d_3{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\tau_N}{\partial x\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x}\{(d_2, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad-(d_1, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+(d_0, d_2{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\}\\
&=(d_3, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad-(d_0, d_0{}^*, d_1, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+(d_0, d_3{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\tau_N}{\partial x_2\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\{-(d_1, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+(d_0, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\}\\
&=(d_3, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad-(d_1, d_2{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad-2(d_0, d_1{}^*, d_1, d_0{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad-(d_2, d_1{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\
&\quad+(d_0, d_3{}^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)
\end{aligned}
$$

これらの結果から

$$
\begin{aligned}
\tau &= (\,\bullet\,) \\
\tau_x &= (d_0, {d_0}^*, \bullet\,) \\
\tau_{xx} - \tau_{x2} &= -2({d_0}^*, d_1, \bullet\,) \\
\tau_{xx} + \tau_{x2} &= 2(d_0, {d_1}^*, \bullet\,) \\
\tau_{xxx} - \tau_{x3} &= 3(d_1, {d_1}^*, \bullet\,) \\
\tau_{xxxx} - 4\tau_{x3,x} + 3\tau_{x2,x2} &= 12(d_0, {d_0}^*, d_1, {d_1}^*, \bullet\,)
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

となる．ここでは各パフィアンに共通な文字リスト$\{1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*\}$を省略して$\{\bullet\}$で表わした．

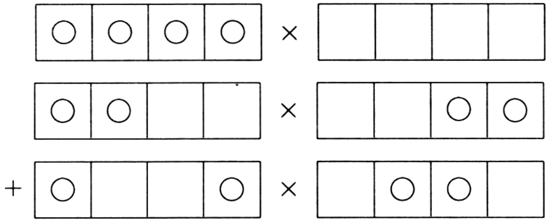
以上の結果をマヤ図形で表現する．

		d_0	${d_0}^*$	d_1	${d_1}^*$
$\tau_N =$					
$\tau_x =$		○	○		
$\tau_{xx} - \tau_{x2} =$	-2		○	○	
$\tau_{xx} + \tau_{x2} =$	2	○			○
$\tau_{xxx} - \tau_{x3} =$	3			○	○
$\tau_{xxxx} - 4\tau_{x3,x} + 3\tau_{x2,x2} =$	12	○	○	○	○

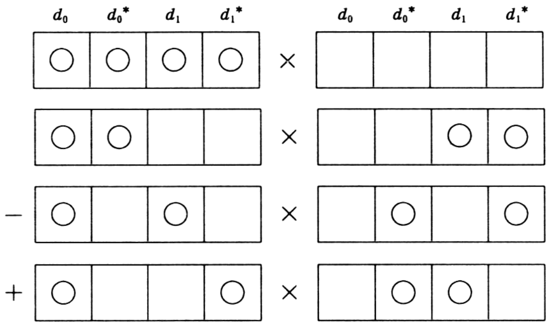
したがって双線形 KP 方程式

$$
\begin{aligned}
&({D_1}^4 - 4D_1D_3 + 3{D_2}^2)\tau\cdot\tau \\
&= 2[(\tau_{xxxx} - 4\tau_{x3,x} + 3\tau_{x2,x2})\tau - 4\tau_x(\tau_{xxx} - \tau_{x3}) + 3(\tau_{xx} + \tau_{x2})(\tau_{xx} - \tau_{x2})] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

は，マヤ図形で次のように表現される．

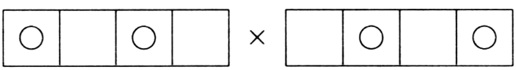


これは行列式に対するヤコビの等式であり，パフィアンの恒等式



の特別の場合である．したがって τ は KP 方程式の解になる．（証明終り）

［注］　上式で右辺の第 2 項は



$$= (d_0, d_1, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$
$$\times (d_0^*, d_1^*, 1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)$$

を表わしているが，これらのパフィアンでは(*)印のついた文字の数と，(*)印のつかない文字の数とが等しくない．したがって関係式

$$\begin{aligned}(i, j) &= (i^*, j^*) = 0 \\ (d_n, i) &= (d_m^*, j^*) = 0\end{aligned} \tag{3.50}$$

から，値が 0 になる．∎

3–3 BKP 方程式の解の構造(パフィアン表示)

1–7 節で示した N–ソリトン解をもつ方程式の中で，次の組{(i–a)式と(i–b)式}，{(ii) (a)式と(ii) (b)式}は互いに同じ非線形性と分散性をもっている．違うのは非線形項にかかる係数だけである．

(i–a)　ラックスの 5 階 KdV 方程式((1.252)式)

$$u_t+10\left(u^3+\frac{1}{2}{u_x}^2+uu_{xx}\right)_x+u_{xxxxx}=0 \tag{3.51a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{3.51b}$$

$$\left[D_x(D_t+{D_x}^5)-\frac{5}{3}D_s(D_s+{D_x}^3)\right]f\cdot f=0 \tag{3.51c}$$

ただし f は，補助変数 s による次の双線形方程式

$$D_x(D_s+{D_x}^3)f\cdot f=0 \tag{3.52}$$

も同時に満たしている．

(i–b)　沢田・小寺方程式((1.254)式)

$$u_t+15(u^3+uu_{xx})_x+u_{xxxxx}=0 \tag{3.53a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{3.53b}$$

$$D_x(D_t+{D_x}^5)f\cdot f=0 \tag{3.53c}$$

(ii)　浅水波のモデル方程式

(a)

$$u_t-u_{xxt}-4uu_t+2u_x\int_x^{\infty}u_t dx'+u_x=0 \tag{3.54a}$$

$$u=2(\log f)_{xx} \tag{3.54b}$$

$$\left[D_x(D_t-D_tD_x{}^2+D_x)+\frac{1}{3}D_t(D_s+{D_x}^3)\right]f\cdot f=0 \tag{3.54c}$$

ただし f は，補助変数 s による次の双線形方程式

$$D_x(D_s+{D_x}^3)f\cdot f=0 \tag{3.55}$$

も同時に満たしている．

(b)
$$u_t - u_{xxt} - 3uu_t + 3u_x\int_x^{\infty} u_t dx' + u_x = 0 \tag{3.56a}$$
$$u = 2(\log f)_{xx} \tag{3.56b}$$
$$D_x(D_t - D_tD_x{}^2 + D_x)f\cdot f = 0 \tag{3.56c}$$

方程式(3.51)と(3.54)のソリトン解は逆散乱法[10]によって発見されている．ところが方程式(3.53)と(3.56)のソリトン解は「直接法」によって求まっただけで，逆散乱法による解法を著者は知らない．じつは方程式(3.53)と(3.56)は以下に述べるBKP方程式系に属し，ソリトン解はパフィアンによる表現がもっとも適切なのである[11]．

［注1］ BKP方程式とは，第1章のKP方程式(1.256)をA型とするとB型になるので，B型KP方程式の意味である．❙

［注2］ 逆散乱法によってBKP方程式系のソリトン解を求めるためには，解が行列式ではなくパフィアンで表現されるため，ゲルファント・レヴィタン(Gel'fand–Levitan)積分方程式の構造を換える必要がある[12]．❙

この節ではBKP方程式のソリトン解をパフィアンで表現し，双線形BKP方程式はパフィアンの恒等式に帰着することを示す．BKP方程式系[11]は次のように表現される．

$$[(D_3 - D_1{}^3)D_{-1} + 3D_1{}^2]\tau\cdot\tau = 0 \tag{3.57a}$$
$$[D_1{}^6 - 5D_1{}^3D_3 - 5D_3{}^2 + 9D_1D_5]\tau\cdot\tau = 0 \tag{3.57b}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

［注］ BKP方程式系の第1式(3.57a)は，従属変数の変換
$$w = 2[\log(\tau)]_x \tag{3.58}$$
によって，次の非線形偏微分方程式に変換される．
$$w_{yt} - w_{xxxy} - 3(w_xw_y)_x + 3w_{xx} = 0 \tag{3.59}$$
ただし，$x_1=x$，$x_{-1}=y$，$x_3=t$ と置いた．❙

式(3.57a)の解の形を調べるために，まず摂動計算によって2–ソリトン解を求める．結果は次のようにまとめられる．
$$\tau_2 = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + b_{12}\exp(\eta_1+\eta_2) \tag{3.60}$$

KP 方程式のときと同じようにパラメータ p_i, q_i を使い,

$$\begin{aligned} \exp(\eta_i) &= \exp(\xi_i + \hat{\xi}_i) \\ \xi_i &= p_i^{-1}x_{-1} + p_i x_1 + p_i^3 x_3 + p_i^5 x_5 + \xi_i^0 \\ \hat{\xi}_i &= q_i^{-1}x_{-1} + q_i x_1 + q_i^3 x_3 + q_i^5 x_5 + \hat{\xi}_i^0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

とおくと，分散関係は自動的に満たされる．位相のずれ b_{12} は

$$b_{12} = \frac{(p_1-p_2)(p_1-q_2)(q_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1+p_2)(p_1+q_2)(q_1+p_2)(q_1+q_2)} \tag{3.62}$$

となる.

N–ソリトン解は，$b_{ij}=\exp(B_{ij})$ とおくと,

$$\tau_N = \sum \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i\eta_i + \sum_{i<j}^{(N)} B_{ij}\mu_i\mu_j\right] \tag{3.63}$$

と表現される．ここで $\sum$ は $\mu_1=0, 1$，$\mu_2=0, 1, \cdots$，$\mu_N=0, 1$ のすべての組合せについての和を，$\sum\limits_{i<j}^{(N)}$ は N 個の中から(条件 $i<j$ のもとで)選んだすべてのペアについての和を意味する.

N–ソリトン解 τ_N は $2N$ 次のパフィアンで表現される[11].

$$\tau_N = (1, 2, 3, \cdots, 2N) \tag{3.64}$$

$$(i, j) = c_{ij} + \int^x D_x f_i(x) \cdot f_j(x) dx \qquad (x=x_1)$$

ここで $f_i(x)\,(i=1, 2, 3, \cdots)$ は，次の線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f_i(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i(x) \qquad (n=-1, 1, 3, 5, \cdots) \tag{3.65}$$

を満たしている．上式で $n=-1$ のとき,

$$\frac{\partial}{\partial x_{-1}} f_i(x) \equiv \int^x f_i(x) dx \tag{3.66}$$

である．また $c_{ij}=-c_{ji}$ である.

[注 1]　ここで N–ソリトン解といっているのは，$3N$ 個のパラメータ(p_i, q_i, ξ_i^0，$i=1, 2, \cdots, N$)を含む解のことである．パフィアンで表現された τ_N は成分に任意パラメータを含む関数 $f_i(x)$ があるので，ソリトン解以外のものも表現

している．▍

［注2］ 積分の下限は $x=-\infty$（被積分関数の値が0になるような x の値）を選ぶが，これは本質的な制約ではない．積分の下限は任意に選んでも結果は変わらない．▍

［注3］ パフィアンの要素 (i,j) は，部分積分により

$$
\begin{aligned}
(i,j) &= c_{ij}+\int^{x} D_x f_i\cdot f_j dx \\
&= c_{ij}+2\int^{x}\frac{\partial f_i}{\partial x} f_j dx - f_i f_j
\end{aligned} \tag{3.67}
$$

となる．したがってパフィアンと行列式の関係式(2.92)によって，N–ソリトン解 τ_N の2乗は次の行列式に等しい．

$$
{\tau_N}^2 = \det\left| c_{ij}+2\int^{x}\frac{\partial f_i}{\partial x} f_j dx \right|_{1\leq j,k\leq 2N} \tag{3.68}
$$

ここで右辺の行列式はKP方程式の解 τ_{KP} である．したがって

$$
\tau_{\mathrm{KP}} = {\tau_{\mathrm{BKP}}}^2 \tag{3.69}
$$

である[8]．▍

［注4］ 2–ソリトン解を具体的に表わすと，次のようになる．ただし，$c_{12}=c_{34}=1$, $f_1=\exp\xi_1$, $f_2=\exp\hat{\xi}_1$, $f_3=\exp\xi_2$, $f_4=\exp\hat{\xi}_2$ と選ぶ．

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= (1,2)(3,4)-(1,3)(2,4)+(1,4)(2,3) \\
&= \left[1+\frac{p_1-q_1}{p_1+q_1}\exp(\xi_1+\hat{\xi}_1)\right]\left[1+\frac{p_2-q_2}{p_2+q_2}\exp(\xi_2+\hat{\xi}_2)\right] \\
&\quad -\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\exp(\xi_1+\xi_2)\times\frac{q_1-q_2}{q_1+q_2}\exp(\hat{\xi}_1+\hat{\xi}_2) \\
&\quad +\frac{p_1-q_2}{p_1+q_2}\exp(\xi_1+\hat{\xi}_2)\times\frac{q_1-p_2}{q_1+p_2}\exp(\hat{\xi}_1+\xi_2)
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

ここで

$$
\hat{\eta}_i = \xi_i+\hat{\xi}_i+\delta_i, \qquad \exp\delta_i = \frac{p_i-q_i}{p_i+q_i} \tag{3.71}
$$

と置くと，

$$\tau_2 = 1+\exp(\hat{\eta}_1)+\exp(\hat{\eta}_2)+b_{12}\exp(\hat{\eta}_1+\hat{\eta}_2) \tag{3.72}$$

である．これは摂動計算で求めた 2–ソリトン解に一致している．❙

パフィアン表示による τ が BKP 方程式(3.57a)

$$[(D_3-D_1{}^3)D_{-1}+3D_1{}^2]\tau\cdot\tau = 0 \tag{3.73}$$

を満たすことを確かめる．この式を普通の微分で表現すると，

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_{-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\tau+3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau\right]\tau+3\left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x_{-1}\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau\right]\frac{\partial\tau}{\partial x}$$
$$-3\left[\frac{\partial^2}{\partial x_{-1}\partial x}\tau\right]\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}-\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\tau\right]\frac{\partial\tau}{\partial x_{-1}} = 0 \tag{3.74}$$

となる．

$$(i,j) = c_{ij}+\int^x D_x f_i(x)\cdot f_j(x)dx \tag{3.75}$$

から，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(i,j) &= \left[\frac{\partial}{\partial x}f_i\right]f_j-f_i\left[\frac{\partial}{\partial x}f_j\right]\\ &= (d_0,d_1,i,j)\\ \frac{\partial}{\partial x_{-1}}(i,j) &= \int^x\left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{-1}\partial x}f_j+\frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_j}{\partial x_{-1}}-\frac{\partial f_i}{\partial x_{-1}}\frac{\partial f_j}{\partial x}-f_i\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_{-1}\partial x}\right]dx\\ &= f_i\frac{\partial f_j}{\partial x_{-1}}-\frac{\partial f_i}{\partial x_{-1}}f_j\\ &= (d_{-1},d_0,i,j)\\ \frac{\partial}{\partial x_3}(i,j) &= \int^x\left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_3\partial x}f_j+\frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_j}{\partial x_3}-\frac{\partial f_i}{\partial x_3}\frac{\partial f_j}{\partial x}-f_i\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_3\partial x}\right]dx\\ &= \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3}f_j-f_i\frac{\partial^3 f_j}{\partial x^3}-2\left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}\frac{\partial f_j}{\partial x}-\frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}\right]\\ &= (d_0,d_3,i,j)-2(d_1,d_2,i,j)\end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$(d_n, i) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}f_i(x) \qquad (n=-1,0,1,2,\cdots) \tag{3.76}$$

である．

この結果，τ_N

$$\begin{aligned}\tau_N &= (1, 2, 3, \cdots, 2N) \\ &= (\bullet)\end{aligned} \tag{3.77}$$

の微分は

$$\frac{\partial}{\partial x}\tau_N = (d_0, d_1, \bullet) \tag{3.78a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_N = (d_0, d_2, \bullet) \tag{3.78b}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\tau_N = (d_1, d_2, \bullet)+(d_0, d_3, \bullet) \tag{3.78c}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x_{-1}\partial x^2}\tau_N = (d_{-1}, d_2, \bullet)+(d_0, d_1, \bullet) \tag{3.78d}$$

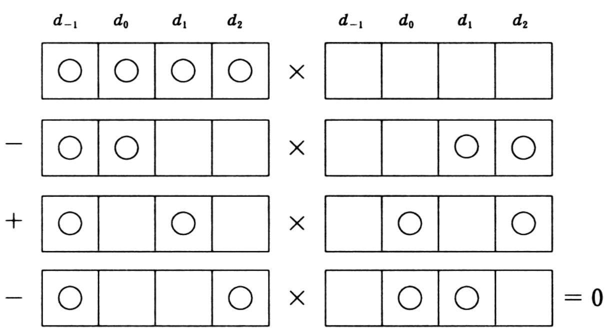
$$\frac{\partial}{\partial x_{-1}}\tau_N = (d_{-1}, d_0, \bullet) \tag{3.78e}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{-1}\partial x}\tau_N = (d_{-1}, d_1, \bullet) \tag{3.78f}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\tau_N = (d_0, d_3, \bullet)-2(d_1, d_2, \bullet) \tag{3.78g}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\tau_N = -3[(d_0, d_2, \bullet)+(d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \bullet)] \tag{3.78h}$$

となる．これらの結果を BKP 方程式に代入すると，



となるが，これはパフィアンの恒等式である．したがって τ_N は BKP 方程式 (3.57a) を満たす[11)]．

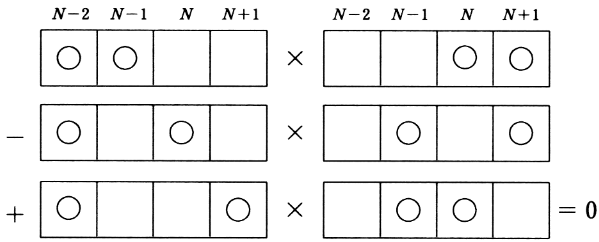
すこし面倒な計算になるが，同様にして τ_N が(3.57b)も満たしていることが確かめられる．

3–4 結合型 KP 方程式の解の構造 (i) ロンスキアン型のパフィアン

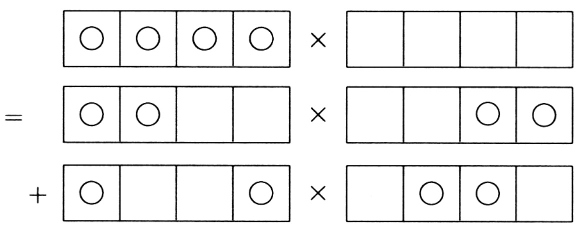
3–1 節と 3–2 節で，双線形の KP 方程式

$$(D_1{}^4-4D_1D_3+3D_2{}^2)\tau\cdot\tau=0 \tag{3.79}$$

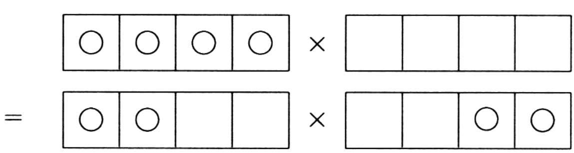
は，(i) τ をロンスキアンで表現すると，次のマヤ図形

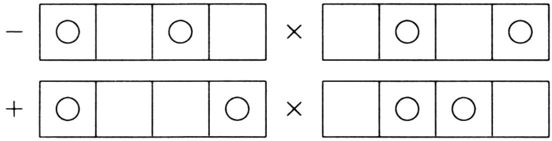


で表現されるプリュッカーの関係式に帰着し，(ii) τ をグラミアン型の行列式で表現すると，次のマヤ図形



で表現されるヤコビの公式に帰着することを示した．プリュッカーの関係式とヤコビの公式は，それぞれ次のパフィアンの恒等式の特別の場合である．





行列式はパフィアンの特別の場合であるので，τを行列式表示からパフィアン表示に拡張すると，KP 方程式を特別の場合として含む新しいソリトン方程式が得られる可能性がある．この可能性を追求してみよう．まず次の型の要素をもつパフィアンを考えよう．

パフィアンの要素(l, m)が，座標$x_1, x_2, \cdots$について，次の微分則

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(l, m) = (l+n, m)+(l, m+n) \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{3.80}$$

を満たすとき，このパフィアンを**ロンスキアン型のパフィアン**[13]とよぶ．

ロンスキアン型のパフィアンはいろいろ考えられるが，例えば次の要素をもつパフィアンを考える．

$$(l, m) \equiv \sum_{k=1}^{M} [\Phi_k{}^{(l)}\Psi_k{}^{(m)} - \Phi_k{}^{(m)}\Psi_k{}^{(l)}] \tag{3.81}$$

ここでMは任意の自然数，$\Phi_k{}^{(l)}$と$\Psi_k{}^{(l)}$は$x(=x_1)$によるl回微分を表わしている．パフィアンの微分則を満たすためにはΦ_kとΨ_kは次の微分方程式を満たしていればよい．

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_k = \Phi_k{}^{(n)}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_n}\Psi_k = \Psi_k{}^{(n)} \tag{3.82}$$

こうすると，確かに

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_n}(l, m) &= \sum_{k=1}^{M} [\Phi_k{}^{(l+n)}\Psi_k{}^{(m)} - \Phi_k{}^{(m+n)}\Psi_k{}^{(l)} + \Phi_k{}^{(l)}\Psi_k{}^{(m+n)} - \Phi_k{}^{(m)}\Psi_k{}^{(l+n)}] \\ &= (l+n, m)+(l, m+n)\end{aligned} \tag{3.83}$$

となる．

前と同じように，パフィアンの展開式を使って微分則を調べる．最も簡単な場合で調べると，

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(i_0, i_1, i_2, i_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_n}[(i_0, i_1)(i_2, i_3) - (i_0, i_2)(i_1, i_3) + (i_0, i_3)(i_1, i_2)] \\
&= (i_0+n, i_1)(i_2, i_3) - (i_0+n, i_2)(i_1, i_3) + (i_0+n, i_3)(i_1, i_2) \\
&\quad + (i_0, i_1+n)(i_2, i_3) - (i_0, i_2+n)(i_1, i_3) + (i_0, i_3+n)(i_1, i_2) \\
&\quad + (i_0, i_1)(i_2+n, i_3) - (i_0, i_2)(i_1+n, i_3) + (i_0, i_3)(i_1+n, i_2) \\
&\quad + (i_0, i_1)(i_2, i_3+n) - (i_0, i_2)(i_1, i_3+n) + (i_0, i_3)(i_1, i_2+n) \\
&= (i_0+n, i_1, i_2, i_3) + (i_0, i_1+n, i_2, i_3) + (i_0, i_1, i_2+n, i_3) + (i_0, i_1, i_2, i_3+n)
\end{aligned}
$$

となる．この式からロンスキアン型のパフィアン $\tau^{\mathrm{W}} = (i_0, i_1, \cdots, i_{2N-1})$ (上つきの添字 W はロンスキアン(Wronskian)の頭文字である)の微分則は次式で与えられることが分かる．

$$
\frac{\partial}{\partial x_n}(i_0, i_1, \cdots, i_{2N-1}) = \sum_{k=0}^{2N-1}(i_0, i_1, \cdots, i_k+n, \cdots, i_{2N-1}) \tag{3.84}
$$

一方，ロンスキアンを次式

$$
Wr(r(0), r(1), r(2), \cdots, r(2N-1))
\equiv \begin{vmatrix} r_1(0) & r_1(1) & \cdots & r_1(2N-1) \\ r_2(0) & r_2(1) & \cdots & r_2(2N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{2N}(0) & r_{2N}(1) & \cdots & r_{2N}(2N-1) \end{vmatrix} \tag{3.85}
$$

ここで，

$$
r_j(n) \equiv \frac{\partial^n}{\partial x^n} r_j(0), \qquad \frac{\partial}{\partial x_n} r_j(m) = r_j(m+n) \tag{3.86}
$$

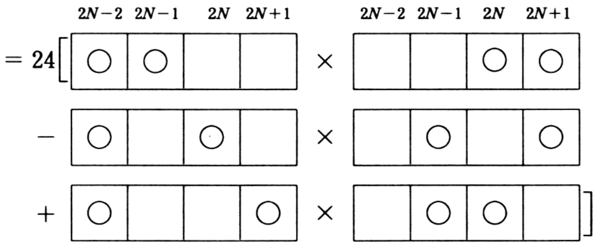
で定義すると，ロンスキアンの微分則はよく知られているように

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_n} Wr(r(i_0), r(i_1), r(i_2), \cdots, r(i_{2N-1})) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{2N-1} Wr(r(i_0), r(i_1), r(i_2), \cdots, r(i_k+n), \cdots, r(i_{2N-1}))
\end{aligned} \tag{3.87}
$$

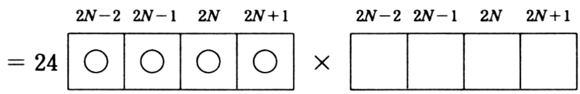
となる．この形式はパフィアン τ^{W} の微分則と全く同じ形式である．このために τ^{W} をロンスキアン型のパフィアンとよぶ．

このパフィアン $\tau^{\mathrm{W}} = (0, 1, \cdots, 2N-1)$ を KP 方程式の左辺に代入すると，KP 方程式の解のロンスキアン表示と同じ計算になって

$$(D_1{}^4-4D_1D_3+3D_2{}^2)\tau^{\mathrm{W}}\cdot\tau^{\mathrm{W}}$$



となる．この式は，パフィアンの恒等式によって，



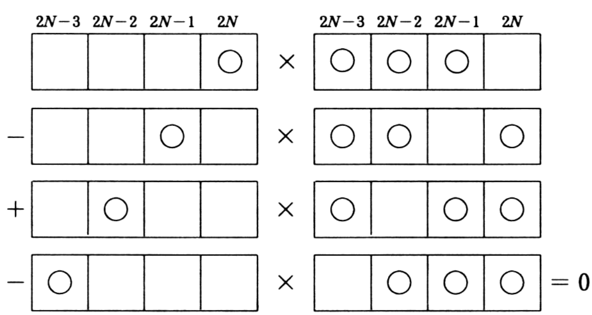
$$\equiv 24\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}\sigma^{\mathrm{W}}$$

である．τがロンスキアンのときにはσ^{W}と$\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}$は0である．

ここで新しく導入されたパフィアンσ^{W}と$\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}$

$$\begin{aligned}\sigma^{\mathrm{W}} &\equiv (0, 1, 2, \cdots, 2N-3)\\ \hat{\sigma}^{\mathrm{W}} &\equiv (0, 1, 2, \cdots, 2N, 2N+1)\end{aligned} \tag{3.88}$$

は，τに比べるとパフィアンの次数が2だけ違う．この点に注意して，σ^{W}とτから生成されるパフィアンの恒等式を探すと，次のものがある．これをマヤ図形で表現すると



である．この恒等式は次の双線形方程式に等しい．

$$(D_1{}^3+2D_3+3D_1D_2)\sigma^{\mathrm{W}}\cdot\tau^{\mathrm{W}}=0 \tag{3.89}$$

同様にして $\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}$ と τ が満たす方程式は次式になる.

$$(D_1{}^3+2D_3-3D_1D_2)\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}\cdot\tau^{\mathrm{W}}=0 \tag{3.90}$$

［注］ この 2 つの双線形方程式は，神保・三輪による第 2 変形 KP 方程式 (2nd modified KP equation)[8] と同じ形式をしている．ただし第 2 変形 KP 方程式の $\sigma^{\mathrm{W}},\tau^{\mathrm{W}}$ はパフィアンではなく行列式である．▎

いままでの結果を総合するとパフィアン $\tau^{\mathrm{W}},\sigma^{\mathrm{W}},\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}$ を次式

$$\begin{aligned}
\tau^{\mathrm{W}} &\equiv (0,1,\cdots,2N-1)\\
\sigma^{\mathrm{W}} &\equiv (0,1,2,\cdots,2N-3)\\
\hat{\sigma}^{\mathrm{W}} &\equiv (0,1,2,\cdots,2N,2N+1)\\
\frac{\partial}{\partial x_n}(l,m) &= (l+n,m)+(l,m+n)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

で定義すると，結合した双線形方程式

$$\begin{aligned}
&(D_1{}^4-4D_1D_3+3D_2{}^2)\tau\cdot\tau=24\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}\sigma^{\mathrm{W}}\\
&(D_1{}^3+2D_3+3D_1D_2)\sigma^{\mathrm{W}}\cdot\tau^{\mathrm{W}}=0\\
&(D_1{}^3+2D_3-3D_1D_2)\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}\cdot\tau^{\mathrm{W}}=0
\end{aligned} \tag{3.92}$$

が得られる．この式は，次の従属変数の変換

$$u=2(\log\tau)_{xx},\qquad v=\sigma/\tau,\qquad \hat{v}=\hat{\sigma}/\tau \tag{3.93}$$

によって，次のような結合した非線形偏微分方程式になる．

$$\begin{aligned}
&(4u_t-6uu_x-u_{xxx})_x-3u_{yy}+24(v\hat{v})_{xx}=0\\
&2v_t+3uv_x+v_{xxx}+3\left(v_{xy}+v\int^x u_y dx\right)=0\\
&2\hat{v}_t+3u\hat{v}_x+\hat{v}_{xxx}-3\left(\hat{v}_{xy}+\hat{v}\int^x u_y dx\right)=0\\
&(x=x_1,\ \ y=x_2,\ \ t=x_3)
\end{aligned} \tag{3.94}$$

これを**結合型 KP 方程式**(coupled KP equation)[13] とよぶ.

［注 1］ この連立偏微分方程式は $t=2T$, $v=\hat{v}=(-b/12)^{1/2}\phi$ とおき，y 依存性がない(y 微分が 0)とすると，次の方程式系

$$u_T-\frac{1}{2}(u_{xxx}+6uu_x) = 2b\phi\phi_x$$
$$\phi_T+\phi_{xxx}+3u\phi_x = 0 \tag{3.95}$$

になる．これは**結合型 KdV 方程式**(coupled KdV equation)[14]と呼ばれていて，KP 方程式系の 4-レダクション(群の分類では $C_2^{(1)}$)の特殊化であることが知られている[8]．したがって上の連立偏微分方程式は結合型 KdV 方程式の 2 次元化とも考えられる．このために上式を結合型 KP 方程式とよんだのである．❙

［注 2］ 結合型 KP 方程式に作用する群(筆者はカッツ・ムーディ・リー群に含まれていると信じる)がどのようなものであるかは全く不明である．群論の立場では KP 方程式に作用する群(A 型)がもっとも一般的で，BKP 方程式に作用する群はそれを特殊化したものであると考える．この考えは筆者の観点(パフィアンの方が行列式より一般的であるとする)と今のところ両立しない．このために，群論の立場からソリトン方程式を統一的に議論することを控えた．❙

［注 3］ 任意の自然数 M, N に対して，次のようなパフィアンを考える．

$$\tau^{\mathrm{W}} \equiv (b_1, b_2, \cdots, b_M, 0, 1, \cdots, N-1)$$
$$\sigma^{\mathrm{W}} \equiv (b_1, b_2, \cdots, b_M, 0, 1, 2, \cdots, N-3)$$
$$\hat{\sigma}^{\mathrm{W}} \equiv (b_1, b_2, \cdots, b_M, 0, 1, 2, \cdots, N, N+1)$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n}(l, m) = (l+n, m)+(l, m+n) \tag{3.96}$$
$$(b_i, b_j) = 0$$
$$(b_i, l) = \frac{\partial^l}{\partial x^l}\phi_i \qquad (i, j=1, 2, \cdots, M,\ \ l=0, 1, 2, \cdots, N-1)$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n}\phi_i = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\phi_i \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

$M=N$ では τ^{W} は N 次のロンスキアンになり，KP 方程式の解になる．$M>N$ のとき τ^{W} は 0，$M<N$ では結合型 KP 方程式の解と KP 方程式の解が共存し

ている混合型モード(hybrid mode)解になる. ∎

3–5 結合型 KP 方程式の解の構造 (ii) グラミアン型のパフィアン

KP 方程式の解としてロンスキアン表示とグラミアン表示があったが, 結合型 KP 方程式

$$(D_1{}^4-4D_1D_3+3D_2{}^2)\tau\cdot\tau = 24\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}\sigma^{\mathrm{W}} \tag{3.97a}$$

$$(D_1{}^3+2D_3+3D_1D_2)\sigma^{\mathrm{W}}\cdot\tau^{\mathrm{W}} = 0 \tag{3.97b}$$

$$(D_1{}^3+2D_3-3D_1D_2)\hat{\sigma}^{\mathrm{W}}\cdot\tau^{\mathrm{W}} = 0 \tag{3.97c}$$

の解にも, ロンスキアン型のパフィアン $\tau^{\mathrm{W}}, \sigma^{\mathrm{W}}, \hat{\sigma}^{\mathrm{W}}$ とグラミアン型のパフィアン $\tau^{\mathrm{G}}, \hat{\sigma}^{\mathrm{G}}, \sigma^{\mathrm{G}}$ がある[13]. $\tau^{\mathrm{G}}, \hat{\sigma}^{\mathrm{G}}, \sigma^{\mathrm{G}}$ は次のように表現される.

$$\begin{aligned}\tau^{\mathrm{G}} &\equiv (1, 2, \cdots, 2N)\\ \sigma^{\mathrm{G}} &\equiv (c_1, c_0, 1, 2, \cdots, 2N)\\ \hat{\sigma}^{\mathrm{G}} &\equiv (d_0, d_1, 1, 2, \cdots, 2N)\end{aligned} \tag{3.98}$$

パフィアンの要素は次式で定義されている.

$$\begin{aligned}(i, j) &\equiv c_{ij}+\int^x (f_i g_j - f_j g_i)dx, \qquad c_{ij} = -c_{ji}\\ (d_n, i) &\equiv \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i\\ (c_n, i) &\equiv \frac{\partial^n}{\partial x^n} g_i\\ (d_m, d_n) &= (c_m, c_n) = (c_m, d_n) = 0\end{aligned} \tag{3.99}$$

ここで不定積分の下限は関数 f_i, g_j とその微分が 0 になるような x の値を選ぶが, これは本質的な制約ではない. 下限の定数は定数 c_{ij} に繰り込める. そして, $f_i, g_i\,(i=1, 2, \cdots, 2N)$ は次の微分方程式を満たす.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_n} f_i &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i \\
\frac{\partial}{\partial x_n} g_i &= (-1)^{n-1} \frac{\partial^n}{\partial x^n} g_i \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
\tag{3.100}
$$

パフィアンの(i, j)要素の微分則

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(i, j) &= f_i g_j - f_j g_i \\
&= (c_0, d_0, i, j) \\
\frac{\partial}{\partial x_2}(i, j) &= \frac{\partial f_i}{\partial x} g_j - f_i \frac{\partial g_j}{\partial x} - \frac{\partial f_j}{\partial x} g_i + f_j \frac{\partial g_i}{\partial x} \\
&= (c_0, d_1, i, j) - (c_1, d_0, i, j) \\
\frac{\partial}{\partial x_3}(i, j) &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} g_j - \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} g_i - \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial g_j}{\partial x} + \frac{\partial f_j}{\partial x}\frac{\partial g_i}{\partial x} \\
&\quad + f_i \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2} - f_j \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2} \\
&= (c_0, d_2, i, j) - (c_1, d_1, i, j) + (c_2, d_0, i, j)
\end{aligned}
$$

から，KP 方程式の計算と同じようにして，$\tau^{\mathrm{G}}, \sigma^{\mathrm{G}}$ に対する次のような微分則を得る．

		c_0	d_0	c_1	d_1
$\tau^{\mathrm{G}} =$					
$\tau^{\mathrm{G}}{}_x =$		○	○		
$\tau^{\mathrm{G}}{}_{xx} - \tau^{\mathrm{G}}{}_{x2} =$	-2		○	○	
$\tau^{\mathrm{G}}{}_{xx} + \tau^{\mathrm{G}}{}_{x2} =$	2	○			○
$\tau^{\mathrm{G}}{}_{xxx} - \tau^{\mathrm{G}}{}_{x3} =$	3			○	○
$\tau^{\mathrm{G}}{}_{xxxx} - 4\tau^{\mathrm{G}}{}_{x3,x} + 3\tau^{\mathrm{G}}{}_{x2,x2} =$	12	○	○	○	○

	c_0	c_1	c_2	d_0
$\sigma^{\mathrm{G}} = \ -$	○	○		
$\sigma^{\mathrm{G}}{}_x = \ -$	○		○	
$\sigma^{\mathrm{G}}{}_{xx}+\sigma^{\mathrm{G}}{}_{x2} = -2$		○	○	
$\sigma^{\mathrm{G}}{}_{xxx}+2\sigma^{\mathrm{G}}{}_{x3}+3\sigma^{\mathrm{G}}{}_{x2,x} = -6$	○	○	○	○
$\tau^{\mathrm{G}}{}_{xxx}+2\tau^{\mathrm{G}}{}_{x3}-3\tau^{\mathrm{G}}{}_{x2,x} = \ \ 6$			○	○

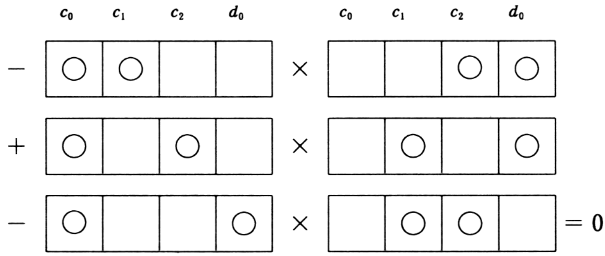
ここでは各パフィアンに共通な文字リスト $\{1, 2, \cdots, 2N\}$ を省略した．したがって結合型 KP 方程式(3. 97a), (3. 97b)

$$
\begin{aligned}
&(\tau^{\mathrm{G}}{}_{xxxx}-4\tau^{\mathrm{G}}{}_{x3,x}+3\tau^{\mathrm{G}}{}_{x2,x2})\tau^{\mathrm{G}}-4(\tau^{\mathrm{G}}{}_{xxx}-\tau^{\mathrm{G}}{}_{x3})\tau^{\mathrm{G}}{}_x \\
&\quad +3(\tau^{\mathrm{G}}{}_{xx}-\tau^{\mathrm{G}}{}_{x2})(\tau^{\mathrm{G}}{}_{xx}+\tau^{\mathrm{G}}{}_{x2}) = 12\sigma^{\mathrm{G}}\hat{\sigma}^{\mathrm{G}} \\
&(\sigma^{\mathrm{G}}{}_{xxx}+2\sigma^{\mathrm{G}}{}_{x3}+3\sigma^{\mathrm{G}}{}_{x2,x})\tau^{\mathrm{G}} \\
&\quad -3(\sigma^{\mathrm{G}}{}_{xx}+\sigma^{\mathrm{G}}{}_{x2})\tau^{\mathrm{G}}{}_x+3\sigma^{\mathrm{G}}{}_x(\tau^{\mathrm{G}}{}_{xx}-\tau^{\mathrm{G}}{}_{x2}) \\
&\quad -\sigma^{\mathrm{G}}(\tau^{\mathrm{G}}{}_{xxx}+2\tau^{\mathrm{G}}{}_{x3}-3\tau^{\mathrm{G}}{}_{x2,x}) = 0
\end{aligned}
$$

は，それぞれマヤ図形で次のように表現される．

	c_0	d_0	c_1	d_1		c_0	d_0	c_1	d_1
	○	○	○	○	×				
$-$	○		○		×		○		○
$-$	○			○	×		○	○	
$= -$	○		○		×		○		○

c_0	c_1	c_2	d_0		c_0	c_1	c_2	d_0
○	○	○	○	×				



これらの式はパフィアンの恒等式に等しい．方程式(3.97c)は上の式で，c と d を交換した式に等しくなる．したがって結合型 KP 方程式のソリトン解は，$\tau^{\mathrm{G}}, \sigma^{\mathrm{G}}, \hat{\sigma}^{\mathrm{G}}$ で与えられる．

［注 1］ グラミアン型のパフィアン τ^{G} は BKP 方程式系

$$\begin{aligned}&[(D_3-D_1{}^3)D_{-1}+3D_1{}^2]\tau\cdot\tau = 0\\&[D_1{}^6-5D_1{}^3D_3-5D_3{}^2+9D_1D_5]\tau\cdot\tau = 0\\&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{3.101}$$

の解に変換される．この場合，関数 f_i, g_i を

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x}\phi_i, \qquad g_i = \phi_i \tag{3.102}$$

のように選ぶ．こうすると

$$(i,j) = c_{ij}+\int^x D_x\phi_i\cdot\phi_j dx \tag{3.103}$$

となって，BKP 方程式系のパフィアンの (i,j) 要素と一致する．▎

［注 2］ KP 方程式系の解を得るためには，任意の自然数 M に対して，関数 f_i, g_i を

$$\begin{aligned}g_i &= 0 \qquad (1\leqq i\leqq M)\\c_{ij} &= 0 \qquad (1\leqq i< j\leqq M)\end{aligned} \tag{3.104}$$

のように選ぶ．そのとき，

$$\begin{aligned}(i,j) &= 0 && (1\leqq i< j\leqq M)\\&= c_{ij}+\int^x f_i g_j dx && (1\leqq i\leqq M,\ M+1\leqq j\leqq 2N)\end{aligned} \tag{3.105}$$

である．(i) $M=N$ のとき $\tau^{\mathrm{G}}=(1,2,\cdots,N,N+1,\cdots,2N)$ は，N 次のグラミアン

$$\tau^{\mathrm{G}} = \det|m_{ij}|_{1\leqq i<j\leqq N}$$
$$m_{ij} = c_{i,2N+1-j} + \int^x f_i g_{2N+1-j}dx \tag{3.106}$$

となる．これはKP方程式の解のグラミアン表示に等しい．(ii) $M>N$ のとき $\tau^{\mathrm{G}}=0$, (iii) $M<N$ のときはKP方程式の解と結合型KP方程式の解が共存している混合型モード解になる．∎

3–6 2次元戸田格子方程式の解 (i)ロンスキアン表示

2次元戸田格子方程式は $n=-\infty, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \infty$ に対して

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial s \partial x} = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \tag{3.107}$$

$$Q_n = \log(1+V_n) \tag{3.108}$$

で記述される．従属変数 V_n の変換

$$V_n = \frac{\partial^2}{\partial s \partial x}\log(\tau_n) \tag{3.109}$$

によって，(3.107)式は x と s で積分できて次式になる．

$$1 + \frac{\partial^2}{\partial s \partial x}\log(\tau_n) = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n{}^2} \tag{3.110}$$

ただし，積分定数は0に選ぶ．$\log(\tau_n)$ の微分を実行し，分母を払うと，次の双線形方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s \partial x}\tau_n\right]\tau_n - \left[\frac{\partial \tau_n}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial \tau_n}{\partial x}\right] = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n{}^2 \tag{3.111}$$

が得られる．この式は D–operator を使って表現すると

$$D_s D_x \tau_n \cdot \tau_n = 2(\tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n{}^2) \tag{3.112}$$

となる．

［注］ 現在2次元戸田格子方程式とよばれているものは1次元戸田格子方程式

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial t^2} = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \tag{3.113}$$

$$Q_n = \log(1+V_n) \tag{3.114}$$

の左辺の慣性項 $\partial^2 Q_n/\partial t^2$ を 2 次元化したものである．物理的に意味のある 2 次元戸田格子方程式は，右辺の力の項を 2 次元化しなければならない．しかし現在 N–ソリトン解が求まっているのは左辺を 2 次元化したものだけであるので，ここではこの式を 2 次元戸田格子方程式とよぶ．▎

方程式(3.112)の N–ソリトン解は，次の N 次のロンスキアン

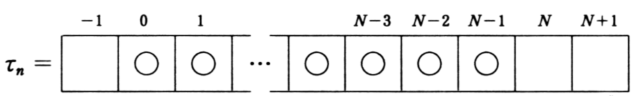
$$\tau_n = \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) & \cdots & \phi_1(n+N-1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) & \cdots & \phi_2(n+N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_N(n) & \phi_N(n+1) & \cdots & \phi_N(n+N-1) \end{vmatrix} \tag{3.115}$$

で表現される[15)]．ここで $\phi_i(n)$ は次の微分方程式を満たす．

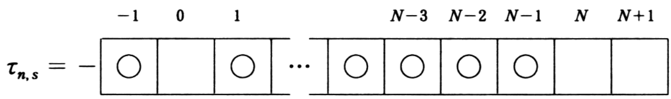
$$\frac{\partial \phi_i(n)}{\partial x} = \phi_i(n+1)$$
$$\frac{\partial \phi_i(n)}{\partial s} = -\phi_i(n-1) \tag{3.116}$$

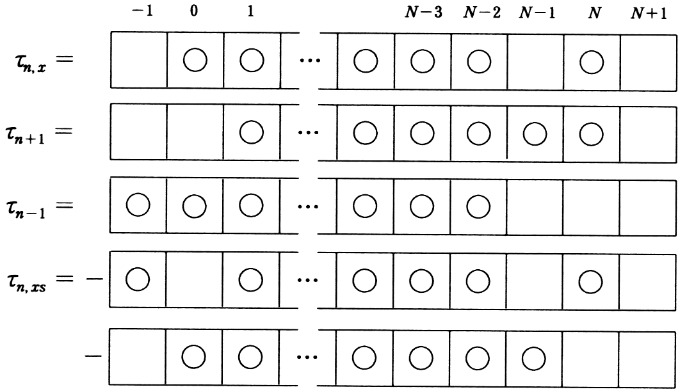
［注］　この行列式は線形差分方程式の理論に現われる N 次のカソラチ(Casorati)行列式に等しい．▎

証明は次のとおりである．まず τ_n を KP 方程式の場合と同じようにマヤ図形で表現する．



τ_n の微分はロンスキアンの微分と同じようにマヤ図形で表現される．

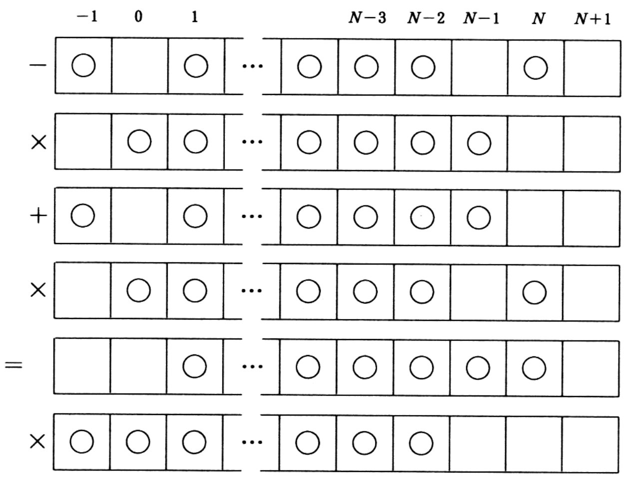




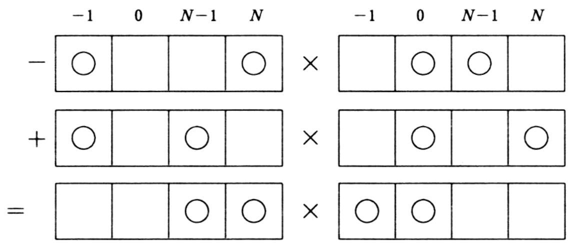
これらの結果を代入すると双線形方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s\partial x}\tau_n\right]\tau_n-\left[\frac{\partial\tau_n}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial\tau_n}{\partial x}\right]=\tau_{n+1}\tau_{n-1}-{\tau_n}^2 \qquad (3.117)$$

は，次のマヤ図形



に帰着する．この図形でセル番号 1, 2, …, $N-2$ には粒子が共通に詰まっているのでこの部分を省略すると，マヤ図形は



となる．これはプリュッカーの関係式であり，自動的に満足されている．（証明終り）

3-7　2次元戸田格子方程式の解 (ii) グラミアン表示

2次元戸田格子方程式の双線形形式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s\partial x}\tau_n\right]\tau_n-\left[\frac{\partial\tau_n}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial\tau_n}{\partial x}\right]=\tau_{n+1}\tau_{n-1}-\tau_n{}^2 \tag{3.118}$$

の解 τ_n のもう1つの表現は次のグラミアン型の行列式

$$\tau_n=\det\left|c_{ij}+(-)^n\int^x f_i{}^{(n)}g_j{}^{(-n)}dx\right|_{1\leq i,j\leq N} \tag{3.119}$$

で与えられる[16)]．ここで $f_i{}^{(n)}, g_j{}^{(-n)}$ は次の線形微分方程式を満たす．

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i{}^{(n)}}{\partial x_k}&=f_i{}^{(n+k)}, & \frac{\partial g_i{}^{(-n)}}{\partial x_k}&=(-)^{k-1}g_i{}^{(-n+k)}\\ \frac{\partial f_i{}^{(n)}}{\partial s_k}&=-f_i{}^{(n-k)}, & \frac{\partial g_i{}^{(-n)}}{\partial s_k}&=(-)^k g_i{}^{(-n-k)}\end{aligned} \tag{3.120}$$

c_{ij} は定数，$x_1=x$，$s_1=s$，$k=1,2,\cdots$，$(-)^n$ は $(-1)^n$ の省略記号である．

［注1］　$f_i{}^{(n)}, g_j{}^{(-n)}$ の n は x による n 回微分，積分を表わしている．❙

［注2］　この τ_n は，因子 $(-)^n$ を除けば，KP方程式の解のグラミアン表示と全く同じである．因子 $(-)^n$ は2次元戸田格子方程式の解を議論するときには必要ないが，BKP方程式の解との対応を議論するときに役に立つ．❙

τ_n をパフィアンで表現する．

$$\tau_n=(1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*)_n$$

$$(i, j^*)_n = c_{ij} + (-)^n \int^x f_i^{(n)} g_j^{(-n)} dx$$

$$(i, j)_n = (i^*, j^*)_n = 0$$

パフィアンの要素$(i, j^*)_n$の x, s による微分と n による差分は，次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial x}(i, j^*)_n = (-)^n f_i^{(n)} g_j^{(-n)}$$

$$= (d_{-n}, d_n^*, i, j^*)_n$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(i, j^*)_n = (-)^{n-1} f_i^{(n-1)} g_j^{(-n-1)}$$

$$= (d_{-n-1}, d_{n-1}^*, i, j^*)_n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial s}(i, j^*)_n = (-)^{n-1} [f_i^{(n)} g_j^{(-n-1)} + f_i^{(n-1)} g_j^{(-n)}]$$

$$= (d_{-n-1}, d_n^*, i, j^*)_n - (d_{-n}, d_{n-1}^*, i, j^*)_n$$

$$(i, j^*)_{n+1} = c_{ij} + (-)^{n+1} \int^x f_i^{(n+1)} g_j^{(-n-1)} dx$$

$$= c_{ij} + (-)^n \int^x f_i^{(n)} g_j^{(-n)} dx + (-)^{n+1} f_i^{(n)} g_j^{(-n-1)}$$

$$= (i, j^*)_n + (d_{-n-1}, d_n^*, i, j^*)_n$$

$$(i, j^*)_{n-1} = c_{ij} + (-)^{n-1} \int^x f_i^{(n-1)} g_j^{(-n+1)} dx$$

$$= c_{ij} + (-)^n \int^x f_i^{(n)} g_i^{(-n)} dx + (-)^{n-1} f_i^{(n-1)} g_j^{(-n)}$$

$$= (i, j^*)_n - (d_{-n}, d_{n-1}^*, i, j^*)_n$$

ここで，

$$(d_n^*, i)_n = f_i^{(n)}$$

$$(d_{-n}, j^*)_n = (-)^n g_j^{(-n)}$$

$$(d_{-n}, d_n^*)_n = (d_{-n}, d_n)_n = (d_{-n}^*, d_n^*)_n = 0$$

である．この結果，$\tau_n = (\cdots)_n$ と略記すると，

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cdots)_n = (d_{-n}, d_n^*, \cdots)_n$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\cdots)_n=(d_{-n-1},d_{n-1}{}^*,\cdots)_n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial s}(\cdots)_n=(d_{-n-1},d_n{}^*,\cdots)_n-(d_{-n},d_{n-1}{}^*,\cdots)_n$$
$$+(d_{-n-1},d_{n-1}{}^*,d_{-n},d_n{}^*,\cdots)_n$$

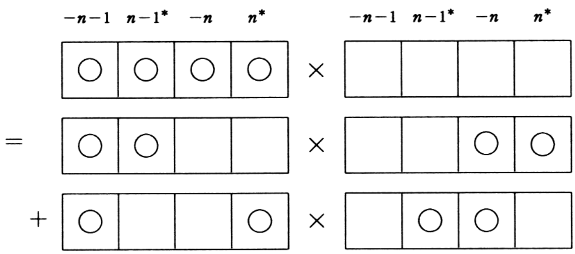
$$\tau_{n+1}=(\cdots)_n+(d_{-n-1},d_n{}^*,i,j^*)_n$$

$$\tau_{n-1}=(\cdots)_n-(d_{-n},d_{n-1}{}^*,i,j^*)_n$$

を得る．これから，2次元戸田格子方程式の双線形形式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s\partial x}\tau_n\right]\tau_n-\left[\frac{\partial\tau_n}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial\tau_n}{\partial x}\right]=\tau_{n+1}\tau_{n-1}-\tau_n{}^2 \tag{3.121}$$

は，マヤ図形で



と表わされる．これは τ_n が双線形方程式の解であることを示している．（証明終り）

次にグラミアン型の行列式 τ_n の BKP 化について述べる．

$$\tau_n=\det|(m_{ij})_n| \tag{3.122}$$
$$(m_{ij})_n\equiv c_{ij}+(-)^n\int^x f_i{}^{(n)}g_j{}^{(-n)}dx$$

は，$n=0$ のとき KP 方程式の解になることを注意したが，ここで f_i と g_j が次のような関係を満たすものとする．

$$g_i=-2\frac{\partial}{\partial x}f_i\qquad(x=x_1) \tag{3.123}$$

このとき，τ_n の要素 $(m_{ij})_n$

$$(m_{ij})_n \equiv c_{ij}-(-)^n 2\int^x f_i^{(n)} f_j^{(1-n)} dx \tag{3.124}$$

は，$c_{ij}=-c_{ji}$ のとき

$$(m_{ij})_{1-n} = -(m_{ij})_n \tag{3.125}$$

である．したがって

$$\tau_{1-n} = (-)^N \tau_n \qquad (N\text{ は行列式の大きさ}) \tag{3.126}$$

である．この関係を満たす τ_n を神保・三輪[8]に従って，**τ_n の BKP 化**(KP 方程式の B 型化)と呼ぶ．なぜなら，$(m_{ij})_0$ は部分積分によって

$$(m_{ij})_0 = c_{ij}+\int^x D_x f_i\cdot f_j dx - f_i f_j \tag{3.127}$$

となるが，この式に関係式(2.92)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-y_1y_1 & a_{12}-y_1y_2 & \cdots & a_{1n}-y_1y_n \\ a_{21}-y_2y_1 & a_{22}-y_2y_2 & \cdots & a_{2n}-y_2y_n \\ a_{31}-y_3y_1 & a_{32}-y_3y_2 & \cdots & a_{3n}-y_3y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-y_ny_1 & a_{n2}-y_ny_2 & \cdots & a_{nn}-y_ny_n \end{vmatrix}$$
$$= (1, 2, \cdots, n)^2 \qquad (\text{ただし } (i, j)\equiv a_{ij},\ n\text{ は偶数})$$

を代入すると，

$$\tau_0 = (\tau_{\mathrm{BKP}})^2 \tag{3.128}$$

となるからである．

［注］ 座標 x_k, s_k の k が偶数のとき，f_j と g_j は異なった(符号がちがう)線形微分方程式を満たすので，次式

$$g_j = -2\frac{\partial}{\partial x} f_j \qquad (x=x_1) \tag{3.129}$$

は x_k, s_k の k が奇数のときのみ満足される．この場合 k が偶数のときの座標 x_k, s_k は凍結して定数と考える．BKP 方程式は k が奇数の座標のみで記述されているので問題はない．∎

3-8　2 次元戸田分子方程式の解 (i) 2 方向ロンスキアン表示

2 次元戸田分子方程式[17]は 2 次元戸田格子方程式と同じ形

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial x \partial y} = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \tag{3.130}$$

をしている．ただし，

$$Q_n \equiv \log(V_n) \tag{3.131}$$

である．格子方程式では

$$Q_n \equiv \log(1+V_n) \tag{3.132}$$

であったことに注意する．だから $V_n=0$ のとき，格子方程式では $Q_n=0$，分子方程式では $Q_n=-\infty$ である．

戸田分子方程式では，n のとる値は $n=1, 2, \cdots, N$ で，境界条件は

$$V_0 = V_{N+1} = 0 \tag{3.133}$$

である．この境界条件のために解の構造が格子方程式とは違ってくる．

格子方程式の場合と同じ従属変数の変換

$$V_n = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(\tau_n) \tag{3.134}$$

をすると，(3.130) 式は x と y で積分できて，次式になる．

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(\tau_n) = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{{\tau_n}^2} \tag{3.135}$$

ただし，積分定数は 0 と選んだ．(3.135) 式は，$\log(\tau_n)$ の微分を実行し，分母を払うと，双線形形式

$$\frac{\partial^2 \tau_n}{\partial x \partial y}\tau_n - \frac{\partial \tau_n}{\partial x}\frac{\partial \tau_n}{\partial y} = \tau_{n+1}\tau_{n-1} \tag{3.136}$$

になる．D-operator を使って表現すると

$$D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = 2\tau_{n+1}\tau_{n-1} \tag{3.137}$$

となる．(3.135) 式を使うと

$$V_n = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(\tau_n) = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{{\tau_n}^2} \tag{3.138}$$

である.

このとき境界条件 $V_0 = V_{N+1} = 0$ は, (3.134)式により

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 \\ \tau_{N+1} &= \Phi(x)\chi(y) \end{aligned} \tag{3.139}$$

によって満たされる. ただし $\Phi(x)$ と $\chi(y)$ はそれぞれ x と y の任意関数である. $n=0,\ N+1$ で(3.138)式が満たされるように, 条件

$$\tau_{-1} = 0, \qquad \tau_{N+2} = 0 \tag{3.140}$$

を設定する.

この双線形方程式の解 τ_n は, 次のような n 次のロンスキアンによって表現される[17].

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 \\ \tau_n &= \det\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-1}\Psi(x,y)\right|_{1\leqq i,j\leqq n} \end{aligned} \tag{3.141}$$

ここで $\Psi(x,y)$ は x と y の任意関数であり, n はロンスキアンの次数を示す自然数であり, 戸田分子の位置を示す座標でもある. このロンスキアンは行の方向にも, 列の方向にもロンスキアンになっているので, **2方向ロンスキアン** (two-directional Wronskian) とよぶ. τ_n を具体的に書き表わすと, 例えば

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \Psi_{00} \\ \tau_2 &= \begin{vmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} \end{vmatrix} \\ \tau_3 &= \begin{vmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} & \Psi_{02} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{20} & \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{3.142}$$

となる. ただし次の記号を使った.

$$\Psi_{ij} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j}\Psi(x, y) \tag{3.143}$$

このとき双線形方程式は，$n=1$ で

$$\tau_{1,xy}\tau_1 - \tau_{1,x}\tau_{1,y} = \tau_2 \tag{3.144}$$

または

$$\Psi_{11}\Psi_{00} - \Psi_{10}\Psi_{01} = \begin{vmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} \end{vmatrix} \tag{3.145}$$

$n=2$ で

$$\tau_{2,xy}\tau_2 - \tau_{2,x}\tau_{2,y} = \tau_3\tau_1 \tag{3.146}$$

または

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{02} \\ \Psi_{20} & \Psi_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} \\ \Psi_{20} & \Psi_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{02} \\ \Psi_{10} & \Psi_{12} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} & \Psi_{02} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{20} & \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{vmatrix} \Psi_{00} \end{aligned} \tag{3.147}$$

となる．これらの等式は行列式を展開してみると正しいことが分かる．

この事実を一般的に証明しよう．次のような $n+1$ 次，n 次，$n-1$ 次の行列式 $D, D\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, D\begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix}$ を導入する．

$$\begin{aligned} D &\equiv \det\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-1}\Psi(x, y)\right|_{1 \leqq i, j \leqq n+1} \\ &= \tau_{n+1} \end{aligned} \tag{3.148a}$$

$$D\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \text{行列式 } D \text{ から第 } i \text{ 行，第 } j \text{ 列を取り除いた行列式} \tag{3.148b}$$

$$D\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = D \text{ から第 } i, j \text{ 行，第 } k, l \text{ 列を取り除いた行列式} \tag{3.148c}$$

この記号を使うと

$$\tau_n = \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \tag{3.149a}$$

$$\tau_{n-1} = D\begin{bmatrix} n & n+1 \\ n & n+1 \end{bmatrix} \tag{3.149b}$$

$$\frac{\partial \tau_n}{\partial x} = D\begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} \tag{3.149c}$$

$$\frac{\partial \tau_n}{\partial y} = D\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} \tag{3.149d}$$

$$\frac{\partial^2 \tau_n}{\partial x \partial y} = D\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \tag{3.149e}$$

と表現されるので，双線形方程式は

$$D\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} D\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} - D\begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} D\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} n & n+1 \\ n & n+1 \end{bmatrix} D \tag{3.150}$$

と書ける．これはヤコビの公式そのものである．したがって τ_n が解であることが証明された．

任意関数 $\Psi(x, y)$ は境界条件 $\tau_{N+1} = \Phi(x)\chi(y)$ を満たす必要がある．このために x だけの関数 $u_j(x)$ と y だけの関数 $v_j(y)$ $(j = 1, 2, \cdots, N+1)$ を用意して，

$$\Psi(x, y) = \sum_{j=1}^{N+1} u_j(x) v_j(y) \tag{3.151}$$

とおく．このように $\Psi(x, y)$ を選ぶと

$$\begin{aligned} \tau_n &= \det\left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i-1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-1} \Psi(x, y) \right|_{1 \leq i, k \leq n} \\ &= \det\left| \sum_{j=1}^{N+1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i-1} u_j(x) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-1} v_j(y) \right|_{1 \leq i, k \leq n} \end{aligned} \tag{3.152}$$

となる．この式は $n \times (N+1)$ のマトリックス A_n と $(N+1) \times n$ のマトリックス B_n の積の行列式である．

$$\tau_n = \det | A_n \times B_n | \tag{3.153}$$

ここで

$$\begin{aligned} (A_n)_{ij} &= \frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}} u_j(x) \\ (B_n)_{jk} &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} v_j(y) \end{aligned} \tag{3.154}$$

$n=N+1$ のとき A_n と B_n は正方行列になり，τ_{N+1} は行列式の積

$$\tau_{N+1} = \det|A_{N+1}| \times \det|B_{N+1}| \tag{3.155}$$

で表わされる．$\det|A_{N+1}|$ は x だけの関数であり，$\det|B_{N+1}|$ は y だけの関数であるので，

$$\tau_{N+1} = \Phi(x)\chi(y) \tag{3.156}$$

となる．これは τ_n に対する境界条件である．したがって τ_n は境界条件を満たす 2 次元戸田分子方程式の解であることが証明された．

［注 1］ 2 次元戸田分子方程式の解はレズノフとサベリエフ (Leznov and Saveliev)[18]によって最初に求められた．彼らの方法は群論によるものである．初学者の理解の範囲を越えるのでロンスキアンによる方法を提示した．❙

［注 2］ 2 次元戸田分子方程式

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial x \partial y} = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \tag{3.157}$$

$$Q_n \equiv \log(V_n) \tag{3.158}$$

は，特別の場合として第 1 章で議論したリウヴィル方程式を含んでいることを注意する．境界条件として $V_0=V_2=0$ を選ぶと，上式は $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial y} &= -2V_1 \\ &= -2\exp(Q_1)\end{aligned} \tag{3.159}$$

となる．これはリウヴィル方程式である．❙

［注 3］ リウヴィル方程式とよく似た構造をしている方程式として 2 波相互作用を記述する方程式

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = -\phi_1\phi_2, \qquad \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = \phi_1\phi_2 \tag{3.160}$$

があった(第 1 章参照)．この方程式は戸田分子方程式のバックルンド変換によって生成される[19]．❙

3–9 2次元戸田分子方程式の解 (ii) 2重ロンスキアン表示

双線形2次元戸田分子方程式

$$D_xD_y\tau_n\cdot\tau_n = 2\tau_{n+1}\tau_{n-1} \tag{3.161}$$

(境界条件は $\tau_0=\chi(y), \tau_M=\Phi(x)$) の解 τ_n の別な表示を考えよう．このために，x のみの任意関数 $f_i(x)$ と y のみの任意関数 $g_i(y)$ $(i=1, 2, \cdots, M)$ を用意して，次のような M 次の**2重ロンスキアン** (double Wronskian) を考える[20]．

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_1{}^{(0)} & f_1{}^{(1)} & \cdots & f_1{}^{(n-1)} & g_1{}^{(0)} & g_1{}^{(1)} & \cdots & g_1{}^{(M-n-1)} \\ f_2{}^{(0)} & f_2{}^{(1)} & \cdots & f_2{}^{(n-1)} & g_2{}^{(0)} & g_2{}^{(1)} & \cdots & g_2{}^{(M-n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_M{}^{(0)} & f_M{}^{(1)} & \cdots & f_M{}^{(n-1)} & g_M{}^{(0)} & g_M{}^{(1)} & \cdots & g_M{}^{(M-n-1)} \end{vmatrix} \tag{3.162}$$

ここで，

$$\begin{gathered} f_i{}^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i, \qquad g_i{}^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial y^n} g_i \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f_i = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i, \qquad \frac{\partial}{\partial y_n} g_i = \frac{\partial^n}{\partial y^n} g_i \\ (i=1, 2, \cdots, M, \quad n=1, 2, \cdots) \end{gathered} \tag{3.163}$$

この式から，$n=0$ のとき

$$\tau_0 = \begin{vmatrix} g_1{}^{(0)} & g_1{}^{(1)} & \cdots & g_1{}^{(M-1)} \\ g_2{}^{(0)} & g_2{}^{(1)} & \cdots & g_2{}^{(M-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_M{}^{(0)} & g_M{}^{(1)} & \cdots & g_M{}^{(M-1)} \end{vmatrix} = \chi(y) \tag{3.164}$$

$n=M$ のとき

$$\tau_M = \begin{vmatrix} f_1{}^{(0)} & f_1{}^{(1)} & \cdots & f_1{}^{(M-1)} \\ f_2{}^{(0)} & f_2{}^{(1)} & \cdots & f_2{}^{(M-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_M{}^{(0)} & f_M{}^{(1)} & \cdots & f_M{}^{(M-1)} \end{vmatrix} = \Phi(x) \tag{3.165}$$

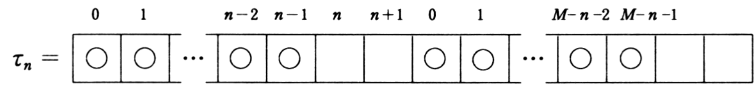
であるから，境界条件は自動的に満たされている．

［注 1］ τ_n は $x_1, x_2, x_3, \cdots$ または $y_1, y_2, y_3, \cdots$ を独立変数とする KP 方程式系の解にもなっている．▎

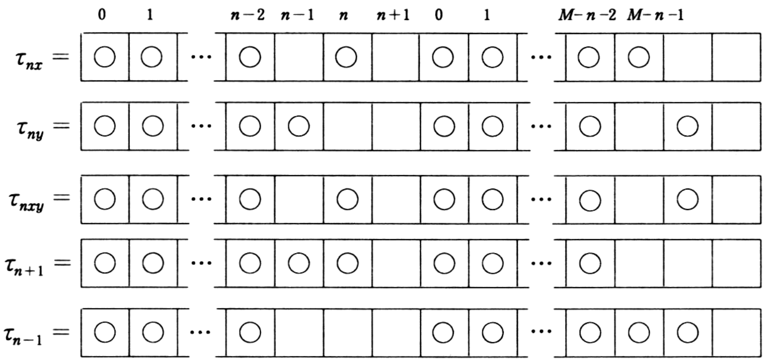
［注 2］ 2 次元戸田分子方程式で $M=\infty$ とした方程式はダルブー (G. Darboux) の『曲面論第 II 巻』にあり，2 重ロンスキアンによる表示もこの曲面論に出ている (亀高惟倫氏の発見，Japan J. Appl. Math., **2** (1985) 241．この中で亀高氏は，戸田分子方程式の hypergeometric solutions について議論している)．▎

［注 3］ 2 重ロンスキアンを拡張して 3 重ロンスキアン (独立変数 x_1, y_1, z_1 の任意関数 $f(x_1), g(y_1), h(z_1)$ から作る) を考えると，6 波相互作用の方程式 (3 波相互作用の方程式の一般化) が得られる．▎

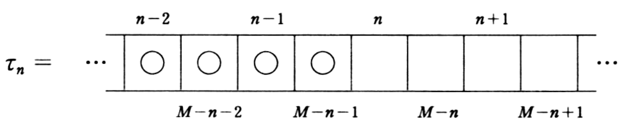
τ_n を次のマヤ図形

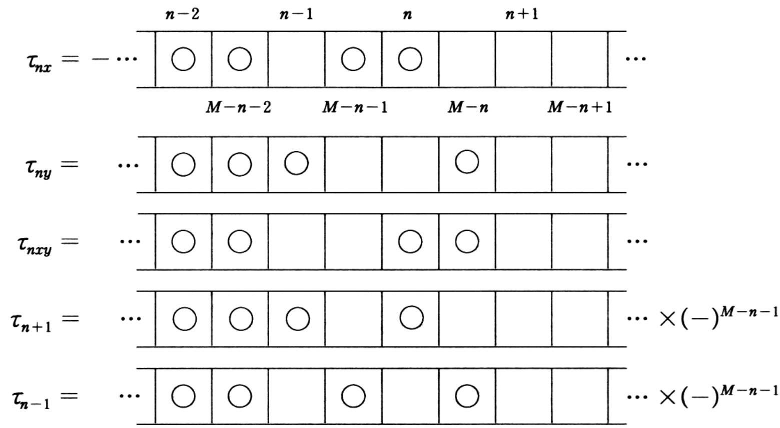


で表現すると，τ_n の微分と τ_{n-1}, τ_{n+1} は次のようになる．



このマヤ図形で，$g_j^{(n)}$ に関する列 $\{1, 2, \cdots, M-n-1\}$ を，1 つおきに，$f_j^{(n)}$ に関する列の間に挿入する．

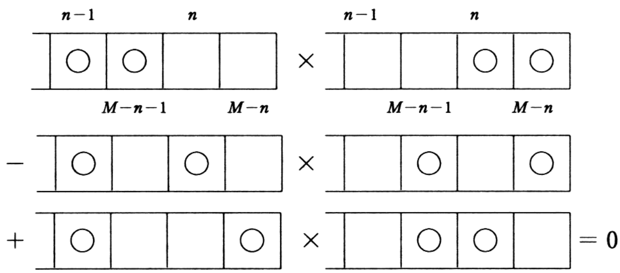




このマヤ図形によって双線形2次元戸田分子方程式

$$\tau_n\tau_{nxy}-\tau_{n+1}\tau_{n-1}-\tau_{ny}\tau_{nx}=0 \tag{3.166}$$

は



となり，この τ_n が2次元戸田分子方程式を満たしていることが分かる．

［注］ 前節の2方向ロンスキアン表示に出てくる関数 $\Psi(x,y)$

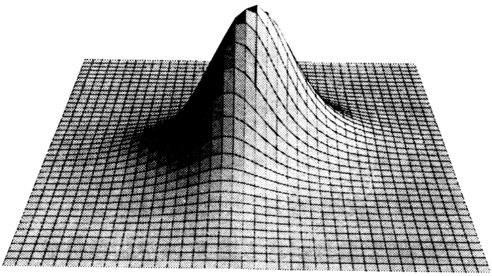
$$\Psi(x,y)=\sum_{j=1}^{M}u_j(x)v_j(y) \tag{3.167}$$

は，この τ_1 と τ_0 の比になる[20]．

$$\Psi(x,y)=\frac{\tau_1}{\tau_0} \tag{3.168}$$

4

バックルンド変換


ドローミオン

4–0　バックルンド変換とは

バックルンド変換(Bäcklund transformation)[1]というのは，ある微分方程式(線形でも非線形でもよい)

$$L_1(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_y, \cdots) = 0$$

の解 u と，もう 1 つの微分方程式(L_1 と同じでも違っていてもよい)

$$L_2(v, v_t, v_x, v_{xx}, v_{xxx}, v_y, \cdots) = 0$$

の解 v との間の変換である．

簡単な例として，次のような分散のない KdV 方程式と分散のない MKdV 方程式

$$u_t + uu_x = 0 \tag{4.1}$$

$$v_t + (av^2 + bv)v_x = 0 \tag{4.2}$$

を考える．ここで a と b は定数である．$b=1$，$a=0$ のとき，式(4.2)は式(4.1)に一致する．式(4.1)と(4.2)の解をつなぐバックルンド変換式は

$$u = av^2 + bv \tag{4.3}$$

である．この u を t で微分して式(4.2)を使うと

$$\begin{aligned} u_t &= (av^2+bv)_t \\ &= -(2av+b)(av^2+bv)v_x \\ &= -uu_x \end{aligned}$$

となるので，バックルンド変換であることが確かめられる．

式(4.2)は

$$v_t+\left(\frac{1}{3}av^3+\frac{1}{2}bv^2\right)_x = 0 \tag{4.4}$$

のように書き換えられるので，v は保存密度($\int vdx$ が保存する)になっている．

［注1］ 式(4.3)では u が v の関数として明示的に表現されている．このとき式(4.3)をミウラ変換(後述)とよぶ．❙

［注2］ T の時間微分がある量 X の空間微分で

$$T_t+X_x = 0$$

と表わされているとき，T を保存密度とよぶ．このとき T の空間積分の時間微分は

$$\left\{\int_a^b Tdx\right\}_t = -\int_a^b X_x dx = X(a)-X(b)$$

で与えられる．境界条件 $X(a)=X(b)$ が満たされるとき，T の空間積分は定数(時間によらない)になるので，これを保存量とよぶ．❙

一方，式(4.3)を使って v を u で表わすと

$$v = \frac{1}{2a}(-b\pm(b^2+4au)^{1/2})$$

である．$b=1$ とおき，a が小さいとして展開すると

$$v \sim u-au^2+2a^2u^3-\cdots$$

となる．v が保存密度である(式(4.4)を満たす)ので，v の a による展開係数である u のベキ乗も保存密度になっている(式(4.4)を満たす)．このことは式(4.2)からも直接検証できるが，任意パラメータを含んだバックルンド変換によって無限個の保存量が生成できる[2)]ことは注目すべきことである．

［注］ バックルンド変換(Bäcklund transformation)というのは耳慣れない言葉である．日本数学会編『数学辞典』第3版(岩波書店)にも記述がない．しかしソリトン理論の発展には重要な寄与をしている．❙

1–3節でリウヴィル方程式

$$u_{xy} = e^{u} \tag{4.5}$$

は線形方程式

$$v_{xy} = 0 \tag{4.6}$$

に帰着することを示したが，次の2式

$$u_x + v_x = 2^{1/2} e^{(u-v)/2} \tag{4.7a}$$

$$u_y - v_y = 2^{1/2} e^{(u+v)/2} \tag{4.7b}$$

を互い違いに微分すると

$$\begin{aligned} u_{xy} + v_{xy} &= 2^{-1/2}(u_y - v_y)e^{(u-v)/2} \\ &= e^{u} \\ u_{yx} - v_{yx} &= 2^{-1/2}(u_x + v_x)e^{(u+v)/2} \\ &= e^{u} \end{aligned}$$

となり，2つの式の和と差をとると，リウヴィル方程式(4.5)と線形方程式(4.6)が生成される．式(4.7)は両者をつなぐバックルンド変換[1)]になっている．

ソリトン方程式では，次に示すサイン・ゴルドン(sine-Gordon)方程式

$$u_{xy} = \sin u \tag{4.8}$$

のバックルンド変換(パラメータ p を含む)

$$\frac{1}{2}(u+v)_x = p \sin\left[\frac{1}{2}(u-v)\right] \tag{4.9a}$$

$$\frac{1}{2}(u-v)_y = p^{-1} \sin\left[\frac{1}{2}(u+v)\right] \tag{4.9b}$$

が最初に発見された[1)]．この2式を互い違いに微分すると

$$\frac{1}{2}(u+v)_{xy} = p\frac{1}{2}(u-v)_y \cos\left[\frac{1}{2}(u-v)\right]$$

$$= \sin\left[\frac{1}{2}(u+v)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(u-v)\right]$$

$$\frac{1}{2}(u-v)_{yx} = p^{-1}\frac{1}{2}(u+v)_x \cos\left[\frac{1}{2}(u+v)\right]$$

$$= \sin\left[\frac{1}{2}(u-v)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(u+v)\right]$$

となるので，これらの式の和と差をつくると

$$u_{xy} = \sin u$$

$$v_{xy} = \sin v$$

となり，式(4.9)はサイン・ゴルドン方程式のバックルンド変換になっている．バックルンド変換はN-ソリトン解を求めたり，ソリトン方程式の無限個の保存量[2)]を求めたりするのに使われる．バックルンド変換と逆散乱法との関係[3),4)]も知られている．

第1章で示したように，サイン・ゴルドン方程式

$$u_{xy} = \sin u$$

は，複対数変換

$$u = 2i \log(f/f^*)$$

によって双線形形式

$$D_xD_yf\cdot f - \frac{1}{2}(f^2 - f^{*2}) = 0$$

になる．それではバックルンド変換(4.9a),(4.9b)に対応する双線形形式はどうなるのだろうか？

結論を先にいえば，式(4.9a)と(4.9b)に対応する双線形形式は

$$D_xf\cdot g = -\frac{p}{2}f^*g^* \tag{4.10a}$$

$$D_yf\cdot g^* = -\frac{p^{-1}}{2}f^*g \tag{4.10b}$$

となる．ただしgはサイン・ゴルドン方程式の別な解

$$D_xD_yg\cdot g-\frac{1}{2}(g^2-g^{*2})=0 \tag{4.11}$$

である．この章では双線形形式におけるバックルンド変換[3),1)]について議論する．

4-1 KdV 型双線形方程式のバックルンド変換[3),1)]

まず一般の KdV 型双線形方程式

$$F(D_t, D_x, D_y)f\cdot f=0 \tag{4.12}$$

の解 f と，同じ双線形方程式

$$F(D_t, D_x, D_y)f'\cdot f'=0 \tag{4.13}$$

の別の解 f' との間を結ぶバックルンド変換を考える．

天下りに次の式 P を考える．

$$P\equiv[F(D_t, D_x, D_y)f'\cdot f']f^2-f'^2[F(D_t, D_x, D_y)f\cdot f] \tag{4.14}$$

$P=0$ のとき，f が双線形方程式の解であれば f' も双線形方程式の解になる．その逆も成り立っている．もし，この式 $P=0$ から f と f' の相対位置を換えた(f と f' にたいする)1 組の双線形方程式

$$\begin{aligned} F_1(D_t, D_x, D_y)f'\cdot f&=0\\ F_2(D_t, D_x, D_y)f'\cdot f&=0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

が得られたら，それが求めるバックルンド変換になる．

f と f' の相対位置を入れ換えるのが，次の交換公式(exchange formula)

$$\begin{aligned} &\exp(D_1)[\exp(D_2)a\cdot b]\cdot[\exp(D_3)c\cdot d]\\ &=\exp\left(\frac{D_2-D_3}{2}\right)\left[\exp\left(D_1+\frac{D_2+D_3}{2}\right)a\cdot d\right]\\ &\quad\cdot\left[\exp\left(-D_1+\left(\frac{D_2+D_3}{2}\right)\right)c\cdot b\right] \end{aligned} \tag{4.16a}$$

$$D_i=\alpha_iD_t+\beta_iD_x+\gamma_iD_y \qquad (i=1, 2, 3) \tag{4.16b}$$

である．例として KdV 方程式

$$D_x(D_t+c_0D_x+D_x{}^3)f\cdot f=0 \tag{4.17}$$

のバックルンド変換[3),5)]を求めよう．ここで c_0 は定数である．

次の式 P を考える．

$$P\equiv[D_x(D_t+c_0D_x+D_x{}^3)f'\cdot f']f^2-f'^2[D_x(D_t+c_0D_x+D_x{}^3)f\cdot f] \tag{4.18}$$

この式で f と f' の相対位置を換えるために，交換公式で

$$\begin{gathered}D_1=\alpha D_x,\quad D_2=D_3=\beta D_x\\ a=d,\quad b=c\end{gathered} \tag{4.19}$$

とおくと

$$\begin{aligned}&[\exp(\alpha D_x+\beta D_x)a\cdot a][\exp(-\alpha D_x+\beta D_x)b\cdot b]\\ &=\exp(\alpha D_x)[\exp(\beta D_x)a\cdot b]\cdot[\exp(\beta D_x)b\cdot a]\end{aligned} \tag{4.20}$$

である．α で展開して1次の係数を集めると

$$\begin{aligned}&[\exp(\beta D_x)D_xa\cdot a][\exp(\beta D_x)b\cdot b]-[\exp(\beta D_x)a\cdot a][\exp(\beta D_x)D_xb\cdot b]\\ &=D_x[\exp(\beta D_x)a\cdot b]\cdot[\exp(\beta D_x)b\cdot a]\end{aligned} \tag{4.21}$$

さらに β で展開すると，1次の係数で，

$$\begin{aligned}[D_x{}^2a\cdot a]b^2-a^2[D_x{}^2b\cdot b]&=D_x[(D_xa\cdot b)\cdot ba+ab\cdot(D_xb\cdot a)]\\ &=2D_x(D_xa\cdot b)\cdot ba\end{aligned} \tag{4.22}$$

この式でさらに $D_x\to D_x+\varepsilon D_t$ と変換して ε の1次の係数から

$$[D_xD_ta\cdot a]b^2-a^2[D_xD_tb\cdot b]=2D_x(D_ta\cdot b)\cdot ba \tag{4.23}$$

を得る．

β の3次の係数は，

$$[D_x{}^4a\cdot a]b^2-a^2[D_x{}^4b\cdot b]=2D_x[(D_x{}^3a\cdot b)\cdot ba+3(D_x{}^2a\cdot b)\cdot(D_xb\cdot a)] \tag{4.24}$$

である．これらの式を P に代入すると

$$\begin{aligned}P&=2D_x(D_tf'\cdot f)\cdot ff'+2c_0D_x(D_xf'\cdot f)\cdot ff'\\ &\quad+2D_x[(D_x{}^3f'\cdot f)\cdot ff'+3(D_x{}^2f'\cdot f)\cdot(D_xf\cdot f')]\\ &=2D_x[(D_t+c_0D_x+D_x{}^3)f'\cdot f]\cdot ff'+6D_x(D_x{}^2f'\cdot f)\cdot(D_xf\cdot f')\end{aligned} \tag{4.25}$$

ここで2つの任意パラメータ λ と μ を導入して上式を書き直すと

$$\begin{aligned}P&=2D_x\{[D_t+(c_0+3\lambda)D_x+D_x{}^3]f'\cdot f\}\cdot ff'\\ &\quad+6D_x[(D_x{}^2-\mu D_x-\lambda)f'\cdot f]\cdot(D_xf\cdot f')\end{aligned} \tag{4.26}$$

となる．ここで λ と μ の係数はそれぞれ

$$\lambda: \quad D_x(D_x f'\cdot f)\cdot f'f + D_x f'f\cdot(D_x f'\cdot f)$$

$$\mu: \quad -D_x(D_x f'\cdot f)\cdot(D_x f\cdot f')$$

であるが D-operator の性質 $D_x a\cdot b = -D_x b\cdot a$ のために 0 である．したがって P を 0 にするような f と f' の関係式バックルンド変換は

$$[D_t + (c_0 + 3\lambda)D_x + D_x{}^3]f'\cdot f = 0 \tag{4.27a}$$

$$(D_x{}^2 - \mu D_x - \lambda)f'\cdot f = 0 \tag{4.27b}$$

が候補になる．

これらの式がバックルンド変換として採用できるためには，2 つの式が矛盾していないこと(**両立条件**，compatibility condition)を調べる必要がある．このことは以下に述べる逆散乱法と関係している．

バックルンド変換式(4.27)は，つぎに述べることがら(i)逆散乱形式，(ii) MKdV 方程式，(iii)ミウラ変換に関係している[5]．

(i)　逆散乱形式

KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{4.28}$$

を，2 つの線形微分方程式(ラックス対，Lax pair)

$$\left.\begin{aligned} A\Psi &= 0 \\ L\Psi &= \lambda\Psi \end{aligned}\right. \tag{4.29}$$

$$A = \partial_t + (3\lambda + 3u)\partial_x + \partial_{xxx}$$

$$L = \partial_{xx} + u$$

の両立条件

$$\begin{aligned}[A, L] &\equiv AL - LA \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

として捉えるのが，ソリトン理論における逆散乱法[6]の基本である．この両立条件は $L_1 \equiv A$，$L_2 \equiv L - \lambda$ とおくと，交換関係

$$[L_1, L_2] = 0 \tag{4.31}$$

に等しい．

この交換関係がバックルンド変換式(4.27a)と(4.27b)の両立条件に等しいことを示そう．式(4.27a)と(4.27b)は f または f' について線形微分方程式になっているので，2 式から f または f' を消去することを考える．

このため従属変数の有理関数型変換を次の式で定義する．

$$\begin{aligned} \Psi &= f'/f \\ u &= 2(\log f)_{xx} \end{aligned} \tag{4.32}$$

有理関数型変換の公式

$$\begin{aligned} (D_x f' \cdot f)/f^2 &= \Psi_x \\ (D_x{}^2 f' \cdot f)/f^2 &= \Psi_{xx} + u\Psi \\ (D_x{}^3 f' \cdot f)/f^2 &= \Psi_{xxx} + 3u\Psi_x \end{aligned} \tag{4.33}$$

により，2 式は

$$\begin{aligned} \Psi_t + (c_0 + 3\lambda)\Psi_x + \Psi_{xxx} + 3u\Psi_x &= 0 \\ \Psi_{xx} + u\Psi - \mu\Psi_x - \lambda\Psi &= 0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

となる．線形微分演算子 L_1, L_2

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_t + (c_0 + 3\lambda + 3u)\partial_x + \partial_{xxx} \\ L_2 &= \partial_{xx} - \mu\partial_x + u - \lambda \end{aligned} \tag{4.35}$$

を導入すると

$$\begin{aligned} L_1\Psi &= 0 \\ L_2\Psi &= 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

と書ける．

両立条件とは，演算子 L_1, L_2 の交換関係，

$$L_1 L_2 \Psi = L_2 L_1 \Psi \tag{4.37}$$

または

$$[L_1, L_2] = 0 \tag{4.38}$$

が成立することを意味する．$\mu = c_0 = 0$ のとき，線形微分演算子 L_1, L_2 は KdV 方程式にたいするラックス対 (L_1, L_2)[6] に等しくなる．逆散乱法と直接法とはこのようにバックルンド変換を通じても関係している．しかし双線形形式にお

けるバックルンド変換は，単にもとの方程式を両立条件として導くだけではない．以下に示すように，この双線形形式のバックルンド変換式(4.27)は新しいソリトン方程式を生成しているのである．

(ii)　変形 KdV 方程式(modified KdV equation, MKdV 方程式と略記)

双線形のバックルンド変換式

$$\begin{aligned}&[D_t+(c_0+3\lambda)D_x+D_x{}^3]f'\cdot f=0\\&(D_x{}^2-\mu D_x-\lambda)f'\cdot f=0\end{aligned}\tag{4.39}$$

で対数型の変数変換

$$\begin{aligned}\phi&=\log(f'/f)\\\rho&=\log(f'f)\end{aligned}\tag{4.40}$$

を行なうと，1–8 節の公式(1.268)から次式を得る．

$$\begin{aligned}&\phi_t+(c_0+3\lambda)\phi_x+\phi_{xxx}+3\phi_x\rho_{xx}+\phi_x{}^3=0\\&\rho_{xx}+\phi_x{}^2-\mu\phi_x-\lambda=0\end{aligned}\tag{4.41}$$

上の第 1 式に第 2 式の ρ_{xx} を代入し，

$$\phi_t+(c_0+3\lambda)\phi_x+\phi_{xxx}+3\phi_x(\mu\phi_x+\lambda-\phi_x{}^2)+\phi_x{}^3=0\tag{4.42}$$

この式を x で微分して $\phi_x=\hat{v}$ と変換すると，変形 KdV 方程式(ガードナー(Gardner)方程式)

$$\hat{v}_t+(c_0+6\lambda)\hat{v}_x+\hat{v}_{xxx}+6\hat{v}_x(-\hat{v}^2+\mu\hat{v})=0\tag{4.43}$$

が得られる．

このガードナー方程式を解くためには，上述の手順を逆にたどって双線形のバックルンド変換式

$$\begin{aligned}&[D_t+(c_0+3\lambda)D_x+D_x{}^3]f'\cdot f=0\\&(D_x{}^2-\mu D_x-\lambda)f'\cdot f=0\end{aligned}\tag{4.44}$$

を解けばよい．

(iii)　ミウラ変換(Miura transformation)

KdV 方程式

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0\tag{4.45}$$

と変形 KdV 方程式

$$v_t+24v^2v_x+v_{xxx}=0 \tag{4.46}$$

の保存量の研究から，ミウラ[7]は KdV 方程式の解 u が変形 KdV 方程式の解 v によって次のように表現されることを発見した．

$$u=(2v)^2-2iv_x \tag{4.47}$$

［注 1］ ミウラは異常な努力をはらって，KdV 方程式の高次保存量の計算をし，この結果と変形 KdV 方程式の保存量との比較により，この関係式を発見した．これが KdV 方程式に対する逆散乱法の発見の契機になったのである．❙

［注 2］ $\hat{v}$ と v の関係は $c_0=\mu=\lambda=0$ のとき，$\hat{v}=2iv$ である．❙

ミウラ変換を双線形形式で表現すると次のようになる．

双線形のバックルンド変換の第 2 式で $\mu=0$, $\lambda=0$ とおくと

$$D_x{}^2f'\cdot f=0 \tag{4.48}$$

である．1–8 節の変換公式(1.268)を使うと

$$(D_x{}^2f'\cdot f)/(f'f)=[\log(f'f)]_{xx}+\{[\log(f'/f)]_x\}^2$$

この式を書き換えると

$$=2(\log f)_{xx}+[\log(f'/f)]_{xx}+\{[\log(f'/f)]_x\}^2$$

となるので，変換

$$\begin{aligned}u&=2(\log f)_{xx}\\ v&=(1/2i)[\log(f'/f)]_x\end{aligned} \tag{4.49}$$

から，双線形形式 $D_x^2f'\cdot f=0$ はミウラ変換[7]

$$u=(2v)^2-2iv_x \tag{4.50}$$

に等しい．

この節で示した式 P

$$P\equiv[F(D_t,D_x,D_y)f'\cdot f']f^2-f'^2[F(D_t,D_x,D_y)f\cdot f] \tag{4.14}$$

から f と f' の相対位置を換えてバックルンド変換

$$F_1(D_t, D_x, D_y)f'\cdot f = 0$$
$$F_2(D_t, D_x, D_y)f'\cdot f = 0 \tag{4.15}$$

を求める方法は，KdV 方程式以外のいろいろなソリトン方程式に適用できる．ここでは 1-7 節に列記した N-ソリトン解をもつ方程式の双線形形式とそのバックルンド変換の式を列記する[5]．

5 階 KdV 方程式(fifth order KdV equation)

$$\left[D_x(D_t+D_x^5)-\frac{5}{6}D_x^3(D_s+D_x^3)\right]f\cdot f = 0 \tag{4.51}$$

$$\text{副条件：}\quad D_x(D_s+D_x^3)f\cdot f = 0 \tag{4.52}$$

$$(D_s+3\lambda D_x+D_x^3)f'\cdot f = 0 \tag{4.53a}$$

$$D_x^2 f'\cdot f = \lambda f' f \tag{4.53b}$$

$$(D_t+15\lambda^2 D_x+D_x^5)f'\cdot f = 0 \tag{4.53c}$$

［注］ このバックルンド変換の最初の 2 式は KdV 方程式のものと同じである．❙

沢田・小寺方程式(Sawada-Kotera equation，(1.254)式)

$$D_x(D_t+D_x^5)f\cdot f = 0 \tag{4.54}$$

$$D_x^3 f'\cdot f = \lambda f' f \tag{4.55a}$$

$$\left(D_t-\frac{15}{2}\lambda D_x^2-\frac{3}{2}D_x^5\right)f'\cdot f = 0 \tag{4.55b}$$

ブシネ方程式(Boussinesq equation，(1.255)式)

$$(D_t^2-D_x^2-D_x^4)f\cdot f = 0 \tag{4.56}$$

$$(D_t+aD_x^2)f'\cdot f = 0 \tag{4.57a}$$

$$(aD_tD_x+D_x+D_x^3)f'\cdot f = 0 \qquad (a^2=-3) \tag{4.57b}$$

カドムツェフ・ペトヴィアシヴィリ方程式(Kadomtsev-Petviashvili equation, KP 方程式と略記，(1.256)式)

$$(-4D_tD_x+3D_y^2+D_x^4)f\cdot f = 0 \tag{4.58}$$

$$(D_y-D_x^2)f'\cdot f = 0 \tag{4.59a}$$

$$(3D_yD_x-4D_t+D_x^3)f'\cdot f = 0 \tag{4.59b}$$

浅水波のモデル方程式

(a)
$$\left[D_x(D_t-D_tD_x{}^2+D_x)+\frac{1}{3}D_t(D_s+D_x{}^3)\right]f\cdot f=0 \tag{4.60}$$

副条件：
$$D_x(D_s+D_x{}^3)f\cdot f=0 \tag{4.61}$$

$$(D_s+3\lambda D_x+D_x{}^3)f'\cdot f=0 \tag{4.62a}$$

$$D_x{}^2f'\cdot f=\lambda f'f+\mu D_xf'\cdot f \tag{4.62b}$$

$$[(1-3\lambda)D_t-D_tD_x{}^2+D_x]f'\cdot f=0 \tag{4.62c}$$

［注］ このバックルンド変換の最初の2式は，KdV 方程式のものと同じである．▎

(b)
$$D_x(D_t-D_tD_x{}^2+D_x)f\cdot f=0 \tag{4.63}$$

$$(D_x{}^3-D_x)f'\cdot f=\lambda f'f \tag{4.64a}$$

$$(3D_xD_t-1)f'\cdot f=\mu D_xf'\cdot f \tag{4.64b}$$

戸田格子方程式(Toda lattice equation, (1.260)式)

$$\left[D_t{}^2-4\sinh^2\left(\frac{D_n}{2}\right)\right]f\cdot f=0 \tag{4.65}$$

(i)
$$\left[D_t\exp\left(-\frac{D_n}{2}\right)-2\lambda\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)\right]f'\cdot f=0 \tag{4.66a}$$

$$[D_t+\lambda^{-1}(\exp(-D_n)-1)]f'\cdot f=0 \tag{4.66b}$$

(ii)
$$D_tf'\cdot f+2\alpha\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)g'\cdot g=0 \tag{4.67a}$$

$$D_tg'\cdot g+2\alpha^{-1}\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)f'\cdot f=0 \tag{4.67b}$$

$$\left[\beta_1\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)+\cosh\left(\frac{D_n}{2}\right)\right]g'\cdot g=f'f \tag{4.67c}$$

$$\left[\beta_2\sinh\left(\frac{D_n}{2}\right)+\cosh\left(\frac{D_n}{2}\right)\right]f'\cdot f=g'g \tag{4.67d}$$

条件：
$$\alpha^{-1}(\beta_1{}^2-1)=\alpha(\beta_2{}^2-1) \tag{4.68}$$

4–2 KP 方程式のバックルンド変換式の構造

前節で記した KP 方程式

$$(D_1{}^4-4D_1D_3+3D_2{}^2)\tau\cdot\tau = 0 \tag{4.58$'$}$$

のバックルンド変換式

$$(D_1{}^2+D_2)\tau\cdot\tau' = 0 \tag{4.59a$'$}$$

$$(D_1{}^3-4D_3-3D_1D_2)\tau\cdot\tau' = 0 \tag{4.59b$'$}$$

の構造について調べよう.

[注] このバックルンド変換式は第1変形(first modified) KP 方程式[8]ともよばれている. ここで $D_1=D_x$, $D_2=D_y$, $D_3=D_z$ である.

第3章で KP 方程式の解 τ はロンスキアンやグラミアン型の行列式で表現できることを知った. このとき, τ' はどのように表現できるかを調べよう. 結論を先にのべると, τ' には(i) ソリトンの数は同じで位相(phase)が違う解と, (ii) ソリトンの数が1つだけ増える解との, 2種類の解がある. どちらの場合も(4.59)式はパフィアンの恒等式に帰着する.

この節では τ と τ' の表示(いろいろな表現方法がある)を与え, それらがバックルンド変換の第1式 $(D_1{}^2+D_2)\tau\cdot\tau'=0$ を満たしていることを確かめる.

a) ロンスキアン表示

まず, $\tau_N{}^{(n)}$ を次式で定義する.

$$\tau_N{}^{(n)} \equiv \begin{vmatrix} f_1{}^{(n)} & f_1{}^{(n+1)} & \cdots & f_1{}^{(n+N-1)} \\ f_2{}^{(n)} & f_2{}^{(n+1)} & \cdots & f_2{}^{(n+N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N{}^{(n)} & f_N{}^{(n+1)} & \cdots & f_N{}^{(n+N-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (d_n, d_{n+1}, \cdots, d_{n+N-1}, N, \cdots, 2, 1) \tag{4.69}$$

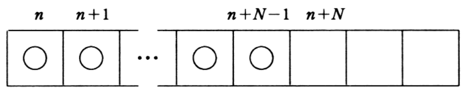
ここで, パフィアンの要素は次のように定義されている.

$$(d_m, j) = \frac{\partial}{\partial x_m} f_j = \frac{\partial^m}{\partial x^m} f_j \qquad (j=1, 2, \cdots, N)$$
$$(d_m, d_n) = 0 \qquad (m, n=0, 1, 2, \cdots) \tag{4.70}$$

である．

［注 1］　$\tau_N^{(n)}$ の添字 $N\,(=0, 1, 2, \cdots)$ は，行列式の大きさつまりソリトンの数を示している．添字 $n\,(=\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots)$ は，いろいろな τ_N を整理するためのパラメータである．┃

［注 2］　$\tau_N^{(n)}$ をマヤ図形で表現すると

$\tau_N^{(n)} =$ 

である．┃

$\tau_N^{(n)}$ の表示を使うと，2 種類の解(i), (ii) は

（i）　$\tau = \tau_N^{(0)}, \qquad \tau' = \tau_N^{(1)}$

（ii）　$\tau = \tau_N^{(0)}, \qquad \tau' = \tau_{N+1}^{(0)}$

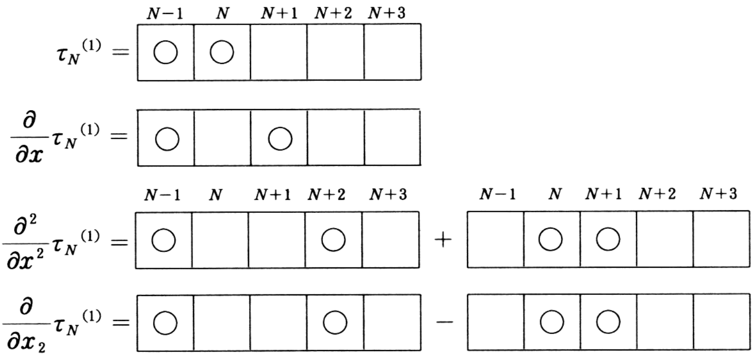
と表現される[9]．

（i）　この場合 τ と τ' に含まれている関数 f_j の数 N は変わらない(ソリトンの数は同じ)が，ソリトンの位置を示す位相 δ_i は変化している．

［注］　τ と τ' は，例えば 2–ソリトン解の場合次のようになる．

$$\tau \propto 1+\exp(\eta_1)+\exp(\eta_2)+c_{12}\exp(\eta_1+\eta_2)$$
$$\tau' \propto 1+\exp(\eta_1+\delta_1)+\exp(\eta_2+\delta_2)+c_{12}\exp(\eta_1+\eta_2+\delta_1+\delta_2)$$
$$\eta_i = \xi_i - \hat{\xi}_i$$
$$\xi_i = \sum_n p_i^n x_n$$
$$\hat{\xi}_i = \sum_n q_i^n x_n$$
$$\exp(\delta_i) = p_i/q_i$$
$$c_{12} = \frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)}$$
┃

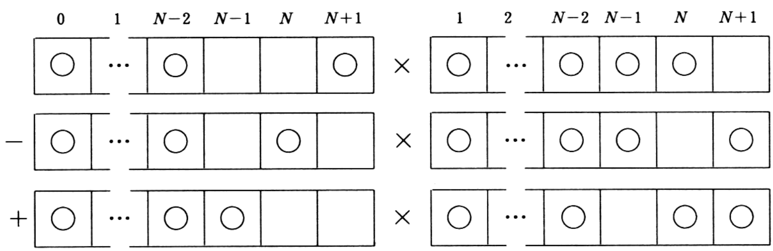
さて τ と τ' がバックルンド変換式(4.59a)を満たすことを確かめるために，$\tau'(=\tau_N^{(1)})$ の微分則を求める．結果をマヤ図形で表わすと



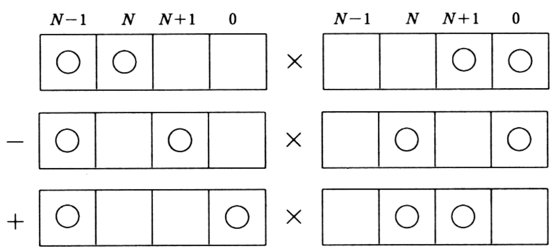
である．一方，$\tau=\tau_N^{(0)}$ の微分則は，上のマヤ図形でセルの上の数字 N を $N-1$ に置き換えたものであるから，これらの結果を，バックルンド変換の第 1 式の左辺

$$(\tau_{xx}+\tau_{x2})\tau'-2\tau_x\tau'_x+\tau(\tau'_{xx}-\tau'_{x2})$$

に代入すると，マヤ図形で



となるが，このマヤ図形は共通する図形を省略し，τ と τ' の位置を入れ換えて整理すると，結局次の図形に帰着する．



これはプリュッカーの関係式であるので恒等的に 0 になり，τ と τ' がバック

ルンド変換式(4.59a)

$$(D_1{}^2+D_2)\tau\cdot\tau' = 0$$

を満たすことが示された．

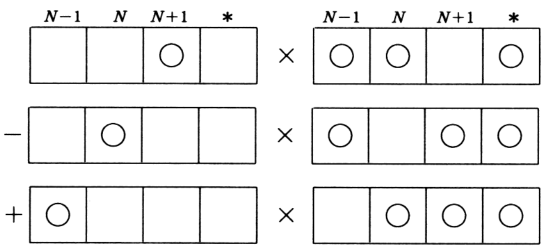
(ii)　この場合，τ と τ' に含まれている関数の数は τ' の方が f_{N+1} の分だけ多い．

$$\tau' = \tau_{N+1}{}^{(0)}$$
$$= (d_0, d_1, \cdots, d_{N-1}, d_N, N+1,\ N, \cdots, 2, 1)$$

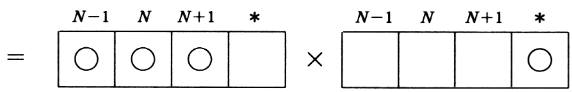
の微分則は，τ $(=\tau_N{}^{(0)})$ の微分則で N を $N+1$ に置き換えたものであるから，これらの結果を，バックルンド変換式(4.59a)の左辺

$$(\tau_{xx}+\tau_{x2})\tau' - 2\tau_x\tau'_x + \tau(\tau'_{xx} - \tau'_{x2})$$

に，代入して整理すると，マヤ図形で



となる．ここで ＊ は新しく増えたソリトンの番号 $N+1$ に対応するセルを示している．このマヤ図形は 2–7 節の式(2.96′)により



である．しかし，微分を表わす文字 d_m の数とソリトンの番号を表わす数字 j とが等しくないので，この式は恒等的に 0 になる．したがって τ と τ' がバックルンド変換式(4.59a)を満たす[10]ことが示された．

b)　グラミアン表現

まず，$\tau_N{}^{[n]}$ を次式で定義する．

$$\tau_N{}^{[n]} \equiv \det|(m_{ij})_n|_{1\leq i,j\leq N} \tag{4.71}$$

$$(m_{ij})_n \equiv c_{ij}+(-)^n\int^x f_i^{(n)}g_j^{(-n)}dx$$

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial x_m}f_j=\frac{\partial^m}{\partial x^m}f_j\equiv f_j^{(m)}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_m}g_j=(-)^{m-1}\frac{\partial^m}{\partial x^m}g_j\equiv(-)^{m-1}g_j^{(m)} \tag{4.72}$$
$$(j=1,2,\cdots,N,\ \ m=1,2,\cdots)$$

である．この表示によって

(i) $$\tau=\tau_N^{[0]},\qquad \tau'=\tau_N^{[1]} \tag{4.73}$$

と表わされる．この場合 τ と τ' に含まれている関数の数は同じであるが，ソリトンの位相は違っている．

$\tau'(=\tau_N^{[1]})$ の成分 $(m_{ij})_1$ は，部分積分によって

$$(m_{ij})_1=c_{ij}+\int^x f_i^{(0)}g_j^{(0)}dx-f_i^{(0)}g_j^{(-1)}$$
$$=(m_{ij})_0-(d_{-1},d_0^*,i,j^*) \tag{4.74}$$

ここで,

$$(d_m,j^*)=g_j^{(m)}$$
$$(d_m^*,j)=f_j^{(m)} \tag{4.75}$$
$$(d_m,d_n^*)=(d_m,j)=(d_m^*,j^*)=0$$

である．したがって第2章のパフィアンの加法定理(2.102)式により

$$\tau_N^{[1]}=\tau_N^{[0]}-(d_{-1},d_0^*,1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*) \tag{4.76}$$

である．

$\tau\ (=\tau_N^{[0]})$ の微分則はパフィアン表示で次のようになる．

$$\tau=(1,2,\cdots,N,N^*,\cdots,2^*,1^*)$$
$$\equiv(\bullet) \tag{4.77a}$$
$$\tau_x=(d_0,d_0^*,\bullet) \tag{4.77b}$$

$$\tau_{xx} = (d_1, d_0{}^*, \bullet) + (d_0, d_1{}^*, \bullet) \tag{4.77c}$$

$$\tau_{x2} = -(d_1, d_0{}^*, \bullet) + (d_0, d_1{}^*, \bullet) \tag{4.77d}$$

$$\tau' = \tau - (d_{-1}, d_0{}^*, \bullet) \tag{4.77e}$$

$$\tau'_x = -(d_{-1}, d_1{}^*, \bullet) \tag{4.77f}$$

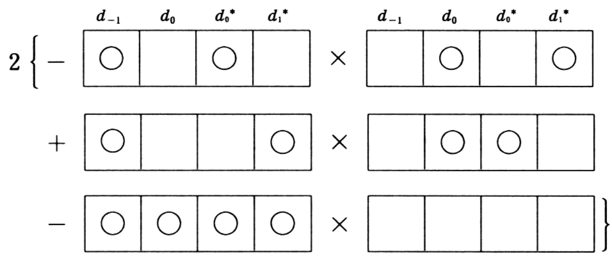
$$\tau'_{xx} = -(d_0, d_1{}^*, \bullet) - (d_{-1}, d_2{}^*, \bullet) - (d_{-1}, d_1{}^*, d_0, d_0{}^*, \bullet) \tag{4.77g}$$

$$\tau'_{x2} = (d_0, d_1{}^*, \bullet) - (d_{-1}, d_2{}^*, \bullet) + (d_{-1}, d_1{}^*, d_0, d_0{}^*, \bullet) \tag{4.77h}$$

これらの結果を，バックルンド変換の第 1 式の左辺

$$(\tau_{xx} + \tau_{x2})\tau' - 2\tau_x\tau'_x + \tau(\tau'_{xx} - \tau'_{x2})$$

に代入して整理すると，マヤ図形で



となる．これはパフィアンの恒等式によって 0 になる．したがって τ と τ' がバックルンド変換の第 1 式を満たすことが示された．

(ii)
$$\begin{aligned}\tau &= (1, 2, \cdots, N, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\ &\equiv (\bullet)\end{aligned} \tag{4.78a}$$

$$\begin{aligned}\tau' &= (1, 2, \cdots, N, N+1, d_0{}^*, N^*, \cdots, 2^*, 1^*)\\ &\equiv -(d_0{}^*, N+1, \bullet)\end{aligned} \tag{4.78b}$$

この場合 τ' に含まれている関数は τ より $(d_0{}^*, N+1) = f_{N+1}$ の分だけ多い．τ' の微分則は，パフィアン表示で次のようになる．

$$\tau'_x = -(d_1{}^*, N+1, \bullet) \tag{4.79a}$$

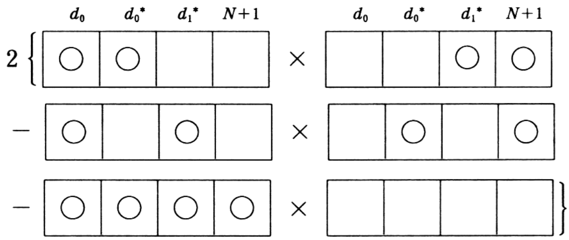
$$\tau'_{xx} = -(d_2{}^*, N+1, \bullet) - (d_0, d_0{}^*, d_1{}^*, N+1, \bullet) \tag{4.79b}$$

$$\tau'_{x2} = -(d_2{}^*, N+1, \bullet) + (d_0, d_0{}^*, d_1{}^*, N+1, \bullet) \tag{4.79c}$$

これらの結果を，バックルンド変換式の左辺

$$(\tau_{xx}+\tau_{x2})\tau'-2\tau_x\tau'_x+\tau(\tau'_{xx}-\tau_{x2}')$$

に代入して整理すると，マヤ図形で



となる．これはパフィアンの恒等式によって0になる．したがってτとτ'がバックルンド変換式(4.59a)を満たすことが示された．

同様にして，τとτ'がバックルンド変換式(4.59b)を満たすことも示せるが，これは紙数の都合で省略する．

4–3 BKP 方程式のバックルンド変換

BKP 方程式

$$[(D_3-D_1{}^3)D_{-1}+3D_1{}^2]\tau\cdot\tau=0 \tag{4.80}$$

のバックルンド変換[11]を求める．τ'を同じ方程式の別な解として，次の量Pを考える．

$$P\equiv\{[(D_3-D_1{}^3)D_{-1}+3D_1{}^2]\tau\cdot\tau\}\tau'\tau'-\tau\tau\{[(D_3-D_1{}^3)D_{-1}+3D_1{}^2]\tau'\cdot\tau'\} \tag{4.81}$$

交換公式

$$[D_3D_{-1}\tau\cdot\tau]\tau'\tau'-\tau\tau[D_3D_{-1}\tau'\cdot\tau']=2D_{-1}[D_3\tau\cdot\tau']\cdot\tau'\tau \tag{4.82a}$$

$$[D_1{}^2\tau\cdot\tau]\tau'\tau'-\tau\tau[D_1{}^2\tau'\cdot\tau']=2D_1[D_1\tau\cdot\tau']\cdot\tau'\tau \tag{4.82b}$$

$$\begin{aligned}&[D_1{}^3D_{-1}\tau\cdot\tau]\tau'\tau'-\tau\tau[D_1{}^3D_{-1}\tau'\cdot\tau']\\&\quad=2D_{-1}(D_1{}^3\tau\cdot\tau')\cdot\tau'\tau+6D_1(D_1D_{-1}\tau\cdot\tau')\cdot(D_1\tau'\cdot\tau)\end{aligned} \tag{4.82c}$$

から

$$P=2D_{-1}[(D_3-D_1{}^3)\tau\cdot\tau']\cdot\tau'\tau-6D_1[(D_1D_{-1}-1)\tau\cdot\tau']\cdot(D_1\tau'\cdot\tau) \tag{4.83}$$

と書き直せるので，バックルンド変換として，次の 2 式

$$(D_1 D_{-1} - 1)\tau \cdot \tau' = \lambda D_1 \tau' \cdot \tau \tag{4.84a}$$

$$({D_1}^3 - D_3)\tau \cdot \tau' = \mu \tau \tau' \tag{4.84b}$$

$$(\lambda, \mu : \text{const.})$$

が候補になる．この 2 式を変形(modified) BKP 方程式という．これから次のことが導かれる．

（i）　逆散乱形式

従属変数の有理関数型変換を

$$\Psi = \tau/\tau', \qquad w = 2(\log \tau')_x \tag{4.85}$$

で定義し，線形微分演算子 L_1, L_2

$$L_1 = \partial_x \partial_y + w_y - 1 + \lambda \partial_x \tag{4.86}$$

$$L_2 = {\partial_x}^3 - \partial_t + 3w_x \partial_x - \mu \tag{4.87}$$

を導入すると，式(4.84a), (4.84b)はそれぞれ

$$L_1 \Psi = 0, \qquad L_2 \Psi = 0 \tag{4.88}$$

となる．演算子 L_1, L_2 の交換関係 $L_1 L_2 \Psi = L_2 L_1 \Psi$ から，BKP 方程式

$$w_{yt} - w_{xxxy} - 3(w_x w_y)_x + 3w_{xx} = 0 \tag{4.89}$$

が得られる．ただし，$x_1 = x$，$x_{-1} = y$，$x_3 = t$ と置いた．

（ii）　変形 BKP 方程式

式(4.84a), (4.84b)で対数型の変数変換

$$\phi = \log(\tau/\tau'), \qquad \rho = \log(\tau\tau') \tag{4.90}$$

を行なうと，次式を得る．

$$\begin{aligned} &\rho_{xy} + \phi_x \phi_y + \lambda \phi_x - 1 = 0 \\ &\phi_t - \phi_{xxx} - 3\phi_x \rho_{xx} - {\phi_x}^3 + \mu = 0 \end{aligned} \tag{4.91}$$

4-4　変形 BKP 方程式の解の構造

第 3 章で BKP 方程式の解はパフィアンで表示されることを学んだが，この節では，変形 BKP 方程式(4.84a), (4.84b) $(\lambda = \mu = 0)$

$$(D_1 D_{-1}-1)\tau\cdot\tau' = 0 \tag{4.92a}$$

$$(D_1{}^3-D_3)\tau\cdot\tau' = 0 \tag{4.92b}$$

の解 τ と τ' について述べる.

τ は次のようなパフィアンで表示されていた.

$$\begin{aligned}&\tau = (1, 2, \cdots, 2N)\\&(i, j) = c_{ij}+\int^x D_x f_i(x)\cdot f_j(x)dx \qquad (x=x_1)\end{aligned} \tag{4.93}$$

ここで $f_i(x)$ $(i=1, 2, 3, \cdots)$ は, 次の線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_n}f_i(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}f_i(x) \qquad (n=-1, 1, 3, \cdots) \tag{4.94}$$

を満たしている. 上式で $n=-1$ のとき,

$$\frac{\partial}{\partial x_{-1}}f_i(x) = \int^x f_i(x)dx \tag{4.95}$$

である. この τ にたいして τ' は次のパフィアンになる.

$$\begin{aligned}\tau' &= (d_0, 1, 2, \cdots, 2N, 2N+1)\\&= (d_0, 2N+1, 1, 2, \cdots, 2N)\end{aligned} \tag{4.96}$$

ここで,

$$\begin{aligned}&(d_n, i) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}f_i\\&(d_m, d_n) = 0\end{aligned} \qquad (m, n=-1, 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.97}$$

である.

τ と τ' が式(4.92a), (4.92b)を満たすことを確かめるために, τ'の微分則を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned}\tau' &= (d_0, 2N+1, 1, 2, \cdots, 2N)\\&\equiv (d_0, 2N+1, \bullet)\end{aligned} \tag{4.98a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{-1}}\tau' = (d_{-1}, 2N+1, \bullet) \tag{4.98b}$$

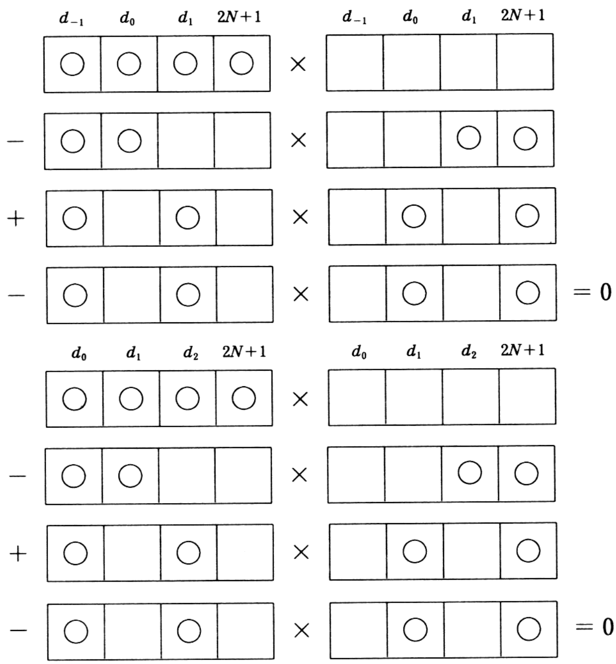
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_{-1}}\tau' = (d_0, 2N+1, \bullet) + (d_{-1}, d_0, d_1, 2N+1, \bullet) \tag{4.98c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\tau' = (d_1, 2N+1, \bullet) \tag{4.98d}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\tau' = (d_3, 2N+1, \bullet) + (d_0, d_1, d_2, 2N+1, \bullet) \tag{4.98e}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\tau' = (d_3, 2N+1, \bullet) - 2(d_0, d_1, d_2, 2N+1, \bullet) \tag{4.98f}$$

この微分則と 3-3 節で得た τ に関する微分則(3.78)式を式(4.92a), (4.92b)に代入して整理すると，マヤ図形でそれぞれ次のように表わされる.



これらはパフィアンの恒等式である. したがって, τ と τ' が式(4.92a), (4.92b)を満たすことが確かめられた.

4–5 2次元戸田方程式のバックルンド変換

2次元戸田方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial s}\log(\varepsilon+V_n) = V_{n-1}-2V_n+V_{n+1} \tag{4.99}$$

ここで，$\varepsilon=0,1$ とする．(i)$\varepsilon=1$ のとき戸田格子方程式に，(ii)$\varepsilon=0$ のとき戸田分子方程式に，それぞれ対応している．

戸田方程式は，変数変換

$$V_n \equiv (\log \tau_n)_{xs}$$

によって，次の双線形形式になる．

(i) 2次元戸田<u>格子</u>方程式($n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty$)

$$D_xD_s\tau_n\cdot\tau_n = 2(\tau_{n+1}\tau_{n-1}-\tau_n{}^2) \tag{4.100a}$$

(ii) 2次元戸田<u>分子</u>方程式($n=1,2,\cdots,N$)

$$D_xD_s\tau_n\cdot\tau_n = 2\tau_{n+1}\tau_{n-1} \tag{4.100b}$$

$$\text{境界条件}: V_0 = V_{N+1} = 0$$

戸田方程式の解 τ_n と同じ方程式の別の解 τ'_n を結ぶバックルンド変換を求めよう[12)]．天下りに次の式 P を考える．

$$\begin{aligned} P = {}&[D_xD_s\tau_n\cdot\tau_n-2\tau_{n+1}\tau_{n-1}+2\varepsilon\tau_n{}^2]\tau'_n{}^2 \\ &-\tau_n{}^2[D_xD_s\tau'_n\cdot\tau'_n-2\tau'_{n+1}\tau'_{n-1}+2\varepsilon\tau'_n{}^2] \end{aligned} \tag{4.101}$$

$P=0$ であれば，τ_nが戸田分子方程式の0でない解であるとき，確かに τ'_n も同じ方程式の解になっているし，その逆も成立している．

交換公式

$$[D_xD_s\tau_n\cdot\tau_n]\tau'_n{}^2-\tau_n{}^2[D_xD_s\tau'_n\cdot\tau'_n] = 2D_x(D_s\tau_n\cdot\tau'_n)\cdot\tau'_n\tau_n \tag{4.102}$$

と，恒等式

$$D_x\tau_{n+1}\tau'_{n-1}\cdot\tau'_n\tau_n = (D_x\tau_{n+1}\cdot\tau'_n)\tau'_{n-1}\tau_n+\tau_{n+1}\tau'_n(D_x\tau'_{n-1}\cdot\tau_n) \tag{4.103}$$

を使って P を書き換える．

$$\frac{P}{2} = D_x[D_s\tau_n\cdot\tau'_n - \lambda\tau_{n+1}\tau'_{n-1}]\cdot\tau'_n\tau_n$$
$$+\lambda[D_x\tau_{n+1}\cdot\tau'_n + \lambda^{-1}\tau_n\tau'_{n+1}]\tau'_{n-1}\tau_n$$
$$-\lambda[D_x\tau_n\cdot\tau'_{n-1} + \lambda^{-1}\tau_{n-1}\tau'_n]\tau'_n\tau_{n+1} \qquad (4.101')$$

となる(λ は自由なパラメータ). したがって次の双線形方程式(μ, ν も自由なパラメータ)

$$D_s\tau_n\cdot\tau'_n = \lambda\tau_{n+1}\tau'_{n-1} - \mu\tau_n\tau'_n \qquad (4.104a)$$
$$D_x\tau_{n+1}\cdot\tau'_n = -\lambda^{-1}\tau_n\tau'_{n+1} + \nu\tau_{n+1}\tau'_n \qquad (4.104b)$$

がすべての n について成立すれば, P は 0 になる. この 2 組の双線形方程式が戸田方程式の解 τ_n と τ'_n をつなぐバックルンド変換になる. バックルンド変換式(4.104a), (4.104b) は次のように書き換えられる[12].

a) ラックス対

従属変数 Ψ_n, V_n, I_n を次式で導入する.

$$\tau'_n \equiv \Psi_n\tau_n \qquad (4.105)$$
$$I_n \equiv (\partial/\partial x)\log(\tau_n/\tau_{n+1})$$
$$= (D_x\tau_n\cdot\tau_{n+1})/(\tau_n\tau_{n+1}) \qquad (4.106)$$
$$V_n \equiv (\log\tau_n)_{xs}$$
$$= \tau_{n+1}\tau_{n-1}/\tau_n{}^2 - \varepsilon \qquad (4.107)$$

このとき(4.104a), (4.104b)式は次のように変換される.

$$\partial\Psi_n/\partial s = -\lambda(V_n+\varepsilon)\Psi_{n-1} + \mu\Psi_n \qquad (4.108a)$$
$$\partial\Psi_n/\partial x = \lambda^{-1}\Psi_{n+1} - \nu\Psi_n - I_n\Psi_n \qquad (4.108b)$$

線形微分差分演算子 L_1, L_2

$$L_1 \equiv \partial/\partial s + \lambda(V_n+\varepsilon)\exp(-\partial/\partial n) - \mu \qquad (4.109a)$$
$$L_2 \equiv \partial/\partial x - \lambda^{-1}\exp(\partial/\partial n) + I_n + \nu \qquad (4.109b)$$

を導入すると, 2 式の両立条件

$$L_1L_2\Psi_n = L_2L_1\Psi_n \qquad (4.110)$$

から, I_n と V_n に対する偏微分方程式

$$(\partial/\partial x)\log(\varepsilon+V_n) = I_{n-1}-I_n$$
$$\partial I_n/\partial s = V_n - V_{n+1} \qquad (4.111)$$

が得られる．この2式から I_n を消去すると戸田方程式になる．したがって (4.109a) と (4.109b) はラックス対(Lax pair)になっている．

b)　変形戸田方程式

新しい従属変数 u_n と v_n を次式で定義する．

$$u_n \equiv (\partial/\partial s)\log(\tau_n/\tau'_n)$$
$$= (D_s\tau_n\cdot\tau'_n)/(\tau_n\tau'_n) \qquad (4.112)$$

(4.104a) から，

$$= \lambda\tau_{n+1}\tau'_{n-1}/(\tau_n\tau'_n)-\mu \qquad (4.112')$$

$$v_n \equiv -(\partial/\partial x)\log(\tau_n/\tau'_{n-1})$$
$$= -(D_x\tau_n\cdot\tau'_{n-1})/(\tau_n\tau'_{n-1}) \qquad (4.113)$$

(4.104b) から，

$$= \lambda^{-1}\tau_{n-1}\tau'_n/(\tau_n\tau'_{n-1})-\nu \qquad (4.113')$$

$\log(\mu+u_n)$ と $\log(\nu+v_n)$ を x と s でそれぞれ微分すると，

$$(\partial/\partial x)\log(\mu+u_n)$$
$$= (\partial/\partial x)[-\log(\tau_n/\tau'_{n-1})+\log(\tau_{n+1}/\tau'_n)]$$
$$= v_n - v_{n+1} \qquad (4.114a)$$
$$(\partial/\partial s)\log(\nu+v_n)$$
$$= (\partial/\partial s)[\log(\tau_{n-1}/\tau'_{n-1})-\log(\tau_n/\tau'_n)]$$
$$= u_{n-1}-u_n \qquad (4.114b)$$

が得られる．この2式は

$$(\partial/\partial x)u_n = (\mu+u_n)(v_n-v_{n+1}) \qquad (4.115a)$$
$$(\partial/\partial s)v_n = (\nu+v_n)(u_{n-1}-u_n) \qquad (4.115b)$$

となる．この1組の式を**変形**(modified)**戸田方程式**とよぶ．

［注］ $n=1, 2, \cdots, N$ とし，境界条件 $u_0=v_{N+1}=0$ を課すと，$\mu=\nu=0$ のとき，

上式は

$$(\partial/\partial x)u_n = u_n(v_n - v_{n+1}) \tag{4.116a}$$

$$(\partial/\partial s)v_n = v_n(u_{n-1} - u_n) \tag{4.116b}$$

となるが，この連立微分方程式は $2N$ 波（u_n と v_n，$n=1, 2, \cdots, N$）の相互作用[12)]を記述している．$N=1$ のとき式(4.116a)，(4.116b)は2波相互作用の式(1.78)

$$\begin{aligned}(\partial/\partial x)u_1 &= u_1 v_1 \\ (\partial/\partial s)v_1 &= -v_1 u_1\end{aligned} \tag{4.117}$$

に帰着する．❙

c）ミウラ変換

戸田方程式の解 V_n，変形戸田方程式の解 u_n と v_n は，次のように表現されている．

$$\varepsilon + V_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^{\ 2}} \tag{4.118a}$$

$$\mu + u_n = \lambda \frac{\tau_{n+1}\tau'_{n-1}}{\tau_n \tau'_n} \tag{4.118b}$$

$$\nu + v_n = \lambda^{-1} \frac{\tau_{n-1}\tau'_n}{\tau_n \tau'_{n-1}} \tag{4.118c}$$

これらの式を比較すると，V_n が u_n と v_n によって表現されることに気づく．

$$\varepsilon + V_n = (\mu + u_n)(\nu + v_n) \tag{4.119}$$

この表現式を戸田方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial s}\log(\varepsilon + V_n) = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \tag{4.120}$$

の左辺に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial x}\log(\mu + u_n)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial s}\log(\nu + v_n)\right] \tag{4.121a}$$

となる．ここで u_n と v_n が変形戸田方程式(4.115a)と(4.115b)を満たしていることを使うと

$$= \frac{\partial}{\partial s}[v_n - v_{n+1}] + \frac{\partial}{\partial x}[u_{n-1} - u_n]$$

$$= (\nu + v_n)(u_{n-1} - u_n) - (\nu + v_{n+1})(u_n - u_{n+1})$$

$$+(\mu+u_{n-1})(v_{n-1}-v_n)-(\mu+u_n)(v_n-v_{n+1})$$
$$=(\mu+u_{n+1})(\nu+v_{n+1})-2(\mu+u_n)(\nu+v_n)+(\mu+u_{n-1})(\nu+v_{n-1})$$
$$=V_{n+1}-2V_n+V_{n-1} \tag{4.121b}$$

これは戸田方程式の右辺である．ゆえに u_n と v_n が変形戸田方程式の解であるとき，V_n は戸田分子方程式の解になることが証明された．このことは(4.119)式が非線形方程式の解を結ぶミウラ変換であることを示している．

4-6　2次元変形戸田方程式の解

第3章で述べたように，戸田方程式

$$D_xD_s\tau_n\cdot\tau_n=2(\tau_{n+1}\tau_{n-1}-\varepsilon\tau_n{}^2) \tag{4.122}$$

の解 τ_n は，(a)戸田格子方程式($\varepsilon=1$, $n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty$)と，(b)戸田分子方程式($\varepsilon=0$, $n=1,\cdots,N$)とでは異なっている．したがって戸田方程式のバックルンド変換式(変形戸田方程式)

$$\begin{aligned} D_s\tau_n\cdot\tau'_n &= \lambda\tau_{n+1}\tau'_{n-1}-\mu\tau_n\tau'_n \\ D_x\tau_{n+1}\cdot\tau'_n &= -\lambda^{-1}\tau_n\tau'_{n+1}+\nu\tau_{n+1}\tau'_n \end{aligned} \tag{4.123}$$

(λ,μ,ν は自由なパラメータ)の解 τ'_n の表現も，(a)戸田格子方程式と(b)戸田分子方程式とでは違っている．

a)　戸田格子方程式のバックルンド変換式の構造

戸田格子方程式の N-ソリトン解 τ_n は N 次のロンスキアンで表現されていた．

$$\tau_n=\begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) & \cdots & \phi_1(n+N-1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) & \cdots & \phi_2(n+N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_N(n) & \phi_N(n+1) & \cdots & \phi_N(n+N-1) \end{vmatrix}$$
$$\equiv[\phi(n),\phi(n+1),\cdots,\phi(n+N-1)]$$
$$=(d_0,d_1,\cdots,d_{N-1},N,\cdots,2,1) \tag{4.124}$$

ここで，$\phi_i(n)$ は次の微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial \phi_i(n)}{\partial x} = \phi_i(n+1)$$
$$\frac{\partial \phi_i(n)}{\partial s} = -\phi_i(n-1) \tag{4.125}$$

この τ_n に対して，τ'_n には KP 方程式のバックルンド変換式の場合と同じように，次の 2 種類の解がある．

（i）ソリトンの数は不変で位相が変化している解($\mu=\lambda=-b/a,\ \nu=\lambda^{-1}$)．バックルンド変換の式は

$$D_s\tau_n\cdot\tau'_n = -\frac{b}{a}(\tau_{n+1}\tau'_{n-1}-\tau_n\tau'_n) \tag{4.126a}$$

$$D_x\tau_{n+1}\cdot\tau'_n = \frac{a}{b}(\tau_n\tau'_{n+1}-\tau_{n+1}\tau'_n) \tag{4.126b}$$

である．このとき，τ'_n は次の N 次のロンスキアンで表現される．

$$\tau'_n = [\hat{\phi}(n), \hat{\phi}(n+1), \cdots, \hat{\phi}(n+N-1)] \tag{4.127}$$

ここで

$$\hat{\phi}_j(n) = a\phi_j(n)+b\phi_j(n+1) \tag{4.128}$$

この τ'_n は関数 ϕ_j の数(ソリトンの数)N は不変で，ソリトンの位相(phase)が変化している解を表わしている．

［注 1］　パラメータに対する条件 $\mu=\lambda,\ \nu=\lambda^{-1}$ は，真空解(ソリトンが存在しない解)$\tau_n=1,\ \tau'_n=\mathrm{const.}$ を式(4.123)に代入すると，必要であることが分かる．▎

［注 2］　τ'_n は，$a=0,\ b=1$ の場合，KP 方程式のバックルンド変換の解 τ'_n に一致している．▎

証明は，$a\neq 0$ の分だけ，いままでのやり方より面倒になる．まず τ_n が次のようないろいろな形に表現できることに注意する．

$$\tau_n = [\phi(n), \phi(n+1), \cdots, \phi(n+N-1)] \tag{4.129}$$
$$= a^{-N+1}[\hat{\phi}(n), \hat{\phi}(n+1), \cdots, \hat{\phi}(n+N-2), \phi(n+N-1)] \tag{4.129a}$$
$$= b^{-N+1}[\phi(n), \hat{\phi}(n), \cdots, \hat{\phi}(n+N-3), \hat{\phi}(n+N-2)] \tag{4.129b}$$

$$= a^{-N}(\tau'_n - b[\hat{\phi}(n), \hat{\phi}(n+1), \cdots, \hat{\phi}(n+N-2), \phi(n+N)]) \qquad (4.129\text{c})$$

$$\tau_{n+1} = [\phi(n+1), \phi(n+2), \cdots, \phi(n+N)] \qquad (4.130)$$

$$= a^{-N+1}[\hat{\phi}(n+1), \hat{\phi}(n+2), \cdots, \hat{\phi}(n+N-1), \phi(n+N)] \qquad (4.130\text{a})$$

$$= b^{-N+1}[\phi(n+1), \hat{\phi}(n+1), \hat{\phi}(n+2), \cdots, \hat{\phi}(n+N-1)] \qquad (4.130\text{b})$$

$$= b^{-N}(\tau'_n - a[\phi(n), \hat{\phi}(n+1), \cdots, \hat{\phi}(n+N-2), \hat{\phi}(n+N-1)]) \qquad (4.130\text{c})$$

［注］　上の書換えはすべて行列式の性質から簡単に求まる．たとえば式(4. 129a)は次のようになる．

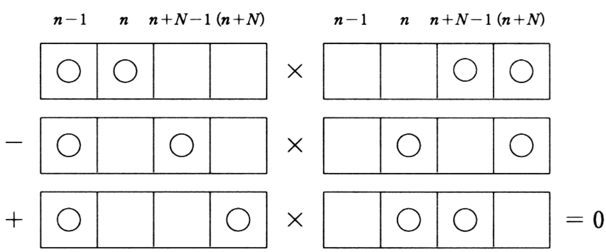
$$\tau_n = [\phi(n), \phi(n+1), \cdots, \phi(n+N-1)]$$

$$= a^{-N+1}[a\phi(n), a\phi(n+1), \cdots, \phi(n+N-1)]$$

$$= a^{-N+1}[a\phi(n)+b\phi(n+1), a\phi(n+1)+b\phi(n+2), \cdots,$$
$$a\phi(n+N-2)+b\phi(n+N-1), \phi(n+N-1)]$$

$$= a^{-N+1}[\hat{\phi}(n), \hat{\phi}(n+1), \cdots, \hat{\phi}(n+N-2), \phi(n+N-1)] \quad ▎$$

さて，式(4. 126a)を証明するために，表現式(4. 129c)を式(4. 126a)の左辺に代入する．同時に表現式(4. 129a), (4. 130a)を右辺に代入する．微分を実行すると(4. 126a)はプリュッカーの関係式を表わす次のマヤ図形になる．



ここでセルの上の数字 m と(m)はそれぞれ $\hat{\phi}(m)$ と $\phi(m)$ の位置を示している．(証明終り)

同様にして，式(4. 126b)の証明もできる．表現式(4. 130c)を式(4. 126b)の左辺に代入し，同時に表現式(4. 129b), (4. 130b)を右辺に代入する．結果はプリュッカーの関係式を表わすマヤ図形になる．

(ii)　ソリトンの数が増える解．簡単のため，自由パラメータは $\lambda=1$, $\mu=\nu=0$ と選ぶ．このときバックルンド変換の式は

$$D_s\tau_n\cdot\tau'_n = \tau_{n+1}\tau'_{n-1} \tag{4.131a}$$

$$D_x\tau_{n+1}\cdot\tau'_n = -\tau_n\tau'_{n+1} \tag{4.131b}$$

になる．τ_n が式(4.124)で表わされるとき，τ'_n は次の $N+1$ 次のロンスキアンで表現される．

$$\tau'_n = (d_0, d_1, \cdots, d_{N-1}, d_N, N+1, N, \cdots, 2, 1) \tag{4.132}$$

この τ'_n は関数 ϕ_j の数(ソリトンの数)N が1個増えた(τ_n に比較して)解を表わしている．

［注1］ パラメータに対する条件 $\lambda=1$, $\mu=\nu=0$ を選んだのは次の理由による．真空解 $\tau_n=1$ と1-ソリトン解 $\tau'_n=\phi(n)$ をバックルンド変換の式に代入すると，線形方程式

$$\begin{aligned} \partial\phi_i(n)/\partial s &= -\lambda\phi_i(n-1)+\mu\phi_i(n) \\ \partial\phi_i(n)/\partial x &= \lambda^{-1}\phi_i(n+1)-\nu\phi_i(n) \end{aligned} \tag{4.133}$$

が得られる．ここで $\phi(n)$ の満たす微分方程式として，$\mu=\nu=0$ を選ぶ．こうすると，$\phi(n)$ はKP方程式の解に一致する．変数 x, s のスケール変換によって λ は1と選べる．▎

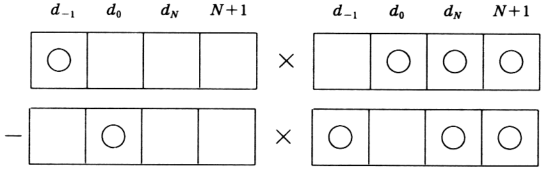
［注2］ n は x-微分の階数を示すので，

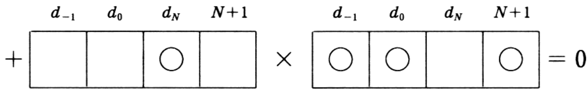
$$\tau_{n+1} = (d_1, d_2, \cdots, d_{N-1}, d_N, N, N-1, \cdots, 2, 1) \tag{4.134a}$$

$$\tau'_{n-1} = (d_{-1}, d_0, \cdots, d_{N-1}, N+1, N, \cdots, 2, 1) \tag{4.134b}$$

と表記される．▎

式(4.131a)の証明は簡単で，式(4.131a)の左辺には表現式(4.124)と(4.132)を代入し，右辺には表現式(4.134a)と(4.134b)を代入すると，次のマヤ図形に帰着する．





(証明終り)．同様にして式(4.131b)も証明される．

b) 戸田分子方程式のバックルンド変換式の構造

前節で求めた変形戸田方程式(バックルンド変換式)は，境界条件 $u_0=v_{N+1}=0$，パラメータ $\mu=\nu=0$ のとき，$2N$ 波相互作用方程式(4.116a)，(4.116b)となることを注意したが，バックルンド変換式

$$D_s\tau_n\cdot\tau'_n = \lambda\tau_{n+1}\tau'_{n-1}-\mu\tau_n\tau'_n \tag{4.135a}$$

$$D_x\tau_{n+1}\cdot\tau'_n = -\lambda^{-1}\tau_n\tau'_{n+1}+\nu\tau_{n+1}\tau'_n \tag{4.135b}$$

で，$\lambda=-b$, $\mu=0$, $\nu=-a/b$ と選ぶと

$$D_s\tau_n\cdot\tau'_n = -b\tau_{n+1}\tau'_{n-1} \tag{4.136a}$$

$$D_x\tau_{n+1}\cdot\tau'_n = b^{-1}(\tau_n\tau'_{n+1}-a\tau_{n+1}\tau'_n) \tag{4.136b}$$

となる．

この式の解 τ_n と τ'_n は，次の n 次の2方向ロンスキアンで表現される．

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 1, \qquad \tau_{-1} = 0\\ \tau_n &= \det|\Psi_{ij}|_{0\leqq i,j\leqq n-1}\end{aligned} \tag{4.137}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\Psi_{ij} &= \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\Psi(s,x)\\ \Psi(s,x) &= \sum_{k=1}^{N+1}u_k(s)v_k(x)\end{aligned} \tag{4.138}$$

であり，$u_k(s)$ と $v_k(x)$ はそれぞれ s と x の任意関数である．

この行列式の各行は s による微分をあらわしているが，それを省略して，

$$\tau_n \equiv [\Psi_0, \Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1}] \tag{4.139}$$

と表記する．この τ_n に対して τ'_n は次のようになる．

$$\begin{aligned}\tau'_0 &= 1, \qquad \tau'_{-1} = 0\\ \tau'_n &= \det|\hat{\Psi}_{ij}|_{0\leqq i,j\leqq n-1}\end{aligned} \tag{4.140}$$

$$\hat{\Psi}_{ij} = a\Psi_{ij}+b\Psi_{i,j+1} \tag{4.141}$$

この行列式の行を省略して，

$$\equiv [\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-1}] \tag{4.142}$$

と表記する．ただし

$$\hat{\Psi}_j = a\Psi_j + b\Psi_{j+1} \tag{4.143}$$

［注］ パラメータに対する条件$\mu=0$は，真空解$\tau_0=\tau'_0=1$を式(4.135a)に代入すると必要なことが分かる．λとνは，式(4.135b)が$n=0$のとき式(4.141)と一致するように定めた．▎

nが行列式の大きさを表わしていることに注意して，τ_nとτ_{n+1}を書き換える．

$$\begin{aligned}\tau_n &\equiv [\Psi_0, \Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1}] \\ &= a^{-n+1}[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \Psi_{n-1}] &\quad (4.144\text{a}) \\ &\equiv a^{-n}(\tau'_n - b[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \Psi_n]) &\quad (4.144\text{b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{n+1} &= [\Psi_0, \Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1}, \Psi_n] \\ &= a^{-n}[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \hat{\Psi}_{n-1}, \Psi_n] &\quad (4.145)\end{aligned}$$

式(4.136a)を証明するために，次のような$n+1$次，n次，$n-1$次の行列式$D, D\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, D\begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix}$を導入しよう．

$$\begin{aligned}D &\equiv \begin{vmatrix} \hat{\Psi}_{00} & \hat{\Psi}_{01} & \cdots & \hat{\Psi}_{0,n-1} & \Psi_{0n} \\ \hat{\Psi}_{10} & \hat{\Psi}_{11} & \cdots & \hat{\Psi}_{1,n-1} & \Psi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\Psi}_{n0} & \hat{\Psi}_{n1} & \cdots & \hat{\Psi}_{n,n-1} & \Psi_{nn} \end{vmatrix} \\ &\equiv [\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \hat{\Psi}_{n-1}, \Psi_n] \\ &= a^n \tau_{n+1} &\quad (4.146\text{a})\end{aligned}$$

$$D\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \text{行列式}\,D\,\text{から第}\,i\,\text{行，第}\,j\,\text{列を取り除いた行列式} \tag{4.146b}$$

$$D\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = D\,\text{から第}\,i,j\,\text{行，第}\,k,l\,\text{列を取り除いた行列式} \tag{4.146c}$$

この記号を使うと

$$\tau'_n = D\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \tag{4.147a}$$

$$\tau'_{n-1} = D\begin{bmatrix} n & n+1 \\ n & n+1 \end{bmatrix} \tag{4.147b}$$

$$\frac{\partial \tau'_n}{\partial s} = D\begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} \tag{4.147c}$$

$$\begin{aligned} &D_s\tau_n\cdot\tau'_n \\ &\quad = D_s a^{-n}(\tau'_n - b[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \Psi_n])\cdot\tau'_n \\ &\quad = -a^{-n}b\left\{D\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}D\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} - D\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}D\begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned} \tag{4.147d}$$

と書ける．したがって式(4.136a)はヤコビの等式

$$D\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}D\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} - D\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}D\begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} n & n+1 \\ n & n+1 \end{bmatrix}D \tag{4.148}$$

に帰着する．（証明終り）

式(4.136b)の証明は次のようになる．まず式(4.136b)を書き換える．

$$[a\tau_{n+1} + b(\partial\tau_{n+1}/\partial x)]\tau'_n - b\tau_{n+1}(\partial\tau'_n/\partial x) - \tau'_{n+1}\tau_n = 0 \tag{4.149}$$

この式の各項は次のように表現される．

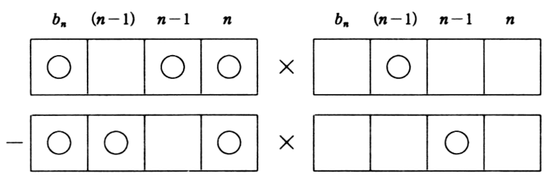
$$\begin{aligned} a\tau_{n+1} + b(\partial\tau_{n+1}/\partial x) &= [\Psi_0, \Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1}, \hat{\Psi}_n] \\ &= a^{-n+1}[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \Psi_{n-1}, \hat{\Psi}_n] \end{aligned} \tag{4.150a}$$

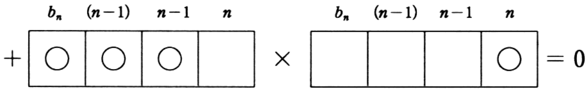
$$b\tau_{n+1} = a^{-n+1}[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \Psi_{n-1}, \hat{\Psi}_{n-1}] \tag{4.150b}$$

これらの表現式と式(4.144a)を代入すると

$$\begin{aligned} &[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \Psi_{n-1}, \hat{\Psi}_n][\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \hat{\Psi}_{n-1}] \\ &-[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \Psi_{n-1}, \hat{\Psi}_{n-1}][\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \hat{\Psi}_n] \\ &-[\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \hat{\Psi}_{n-1}, \hat{\Psi}_n][\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \cdots, \hat{\Psi}_{n-2}, \Psi_{n-1}] = 0 \end{aligned} \tag{4.151}$$

となる．これらの行列式は行方向にみると x-微分によるロンスキアンであるのでパフィアン $(b_n, m) = (\partial^n/\partial x^n)\hat{\Psi}_m$ を導入すると，式(4.151)は次のマヤ図形で表わされるパフィアンの恒等式に帰着する．





ここでセルの上の数字 m と (m) はそれぞれ $\hat{\Psi}_n$ と Ψ_n の位置を示している．(証明終り)

蛇足．このような証明を眺めてみて，「非常に手続きが面倒で自分にはとても証明法が発見できそうもない」と思われる方もあるかも知れない．しかし，実際は想像するよりも簡単である．筆者はまず $n=0,1$ の場合に予想を手計算で確かめ，その予想が一般的に正しいかどうかは数式処理で $n=2,3,\cdots$ の場合で計算する．確かに予想が成立しそうだとの確信が得られた後，証明を考えるのである．証明の各ステップでも数式処理を使って確認する方が自分勝手な思い込みをする危険が少なくなる．▎

この章ではソリトン方程式の中でも最も基本的である KP，BKP，戸田方程式の双線形形式によるバックルンド変換(第 1 変形方程式)とその解の構造について議論し，バックルンド変換式はすべてパフィアンの恒等式に帰着することを示した．

あとがき

ようやく直接法の基礎が終わって，これから応用をと思ったとたん，与えられた紙数が尽きているのに気がついた．あまりに丁寧な(冗長な？)説明が多すぎるので，何度カットしようと思ったことか．しかし，難解な数学書に泣かされた昔のことを思い起こして，蛇足とも思える注釈なども残すことにした．

書き残したことなどについて，すこし触れてみよう．

［1］　基礎方程式である KP，BKP，戸田方程式とそのバックルンド変換式等は多種多様なソリトン方程式を構成するアトム(構成因子)のようなものである．これらを組み合わせると，いろいろなソリトン方程式とその解が生成される．近代科学が物質のコントロールに成功したのは，物質を構成要素であるアトムに分解して理解し，アトムを再構成して新しい物質を創造しえたからである．アトムからソリトン方程式を構成する方法について説明できなかったのは残念である．たとえば KP 方程式のバックルンド変換式は，非線形シュレーディンガー方程式の双線形形式と読み換えられるのである．このようにしてデイヴィー・ステュワートソン(Davey–Stewartson)方程式の解であるドローミオン(dromion，2 次元的に局在しているソリトン)を構成するのである．

また見掛けがまったく異なった非線形偏微分方程式が，双線形形式に変換するとまったく同じものに帰着することがある．

[2] バックルンド変換式(第1変形方程式)はソリトン方程式であり，この方程式に関する新しいバックルンド変換(第2変形方程式)も存在する．さらに第2変形方程式にもバックルンド変換(第3変形方程式)が存在し，この系列は無限につづく．この中にどのような面白い方程式があるか，新しい発見が期待される．

[3] 結合型KP方程式のバックルンド変換式からどんなソリトン方程式が生成されるのか？

[4] ソリトンに関連してパフィアンという言葉が最初に現われた論文は

E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa : "Transformation Groups for Soliton Equations: IV. A New Hierarchy of Soliton Equation of KP-type", Physica **4D** (1982) 343–365

である．

[5] ソリトン方程式は必ず差分化できると著者は信じている．したがって無限個の保存量や厳密解をもつ非線形偏差分方程式が無数に生成できる．この信念の裏付けになるのは「KP方程式の τ と差分化されたKP方程式の τ が一致する」という著しい事実である．

図1–7に示したソリトンの衝突は，こうして得られた次の非線形偏差分方程式(差分スキーム)で計算した例である．

$$u_n{}^{t+1}-u_n{}^t=\delta\{u_{n-1}{}^{t+1}u_n{}^t-u_n{}^{t+1}u_{n+1}{}^t\}$$

ここで，n は空間の格子点，t は時間，δ は差分間隔である．この方程式は周期的境界条件のもとで無限個の保存量をもつ．

ところが，周期的境界条件のもとで可積分系と思われるこの差分方程式が，境界条件 $u_{n-1}{}^t=\alpha$，$u_{n+2}{}^t=\beta$ という境界条件のもとでは $u_n{}^t=x^t$，$u_{n+1}{}^t=y^t$ の時間発展はカオス的になることが最近発見された．

[6] 双線形形式を使って偏微分方程式の初期値問題を解く方法については大石進一氏の研究がある．彼によると，解が行列式で表現されるときには，双線形形式を使って初期値問題が解けるとのことである．

S. Oishi: "A Method of Analysing Soliton Equations by Bilinearization",

J. Phys. Soc. Jpn. **48** (1980) 639.

[7] 双線形形式を摂動系に応用した故矢嶋信男先生の論文がある.

N. Yajima: "Application of Hirota's Method to a Perturbed System", J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 1298–1302.

[8] ソリトン方程式は物理学に現われる特殊関数と密接な関係がある. ある意味でソリトン理論は特殊関数の理論ともいえる. 中村明氏はある種の信念からこの問題を追求しつづけている. 次に彼の結果を列記する. 括弧内は関係している特殊関数である.

1) A. Nakamura: Progr. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 195.

この年までの結果の Review. その後の成果は以下の論文.

2) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 412 (Airy function, Hermite polynomial).

3) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 2687 (associated Legendre functions).

4) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 1553 (associated Legendre functions, generalized Laguerre functions).

5) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3101 (Jacobi polynomials).

6) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 4272 (Gauss hyper geometric functions).

7) A. Nakamura and Y. Ohta: J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 1835 (Legendre polynomials).

これらの結果は何を意味するのだろうか?

なお直接法についての解説として次のものがある.

[9] M. Matsuno: *Bilinear Transformation Method* (Academic Press, 1984).

この本の特徴は Benjamin–Ono Equation の双線形化についての詳しい解説である.

[10] J. J. C. Nimmo: "Hirota's Method", in "Soliton Theory: a

survey of results" ed. by A. P. Fordy (Manchester Univ. Press, 1990). この中ではソリトン解を生成する Vertex operator や双線形方程式の群論的意味が解説されている.

参考文献

第1章　ソリトン方程式の双線形化

1) G. A. Baker, Jr. and J. L. Gammel (eds.): *The Padé Approximant in Theoretical Physics* (Academic Press, 1970).

2) N. J. Zabusky and M. D. Kruskal: Phys. Rev. Lett. **15** (1965) 240.

3) C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1095.

4) E. Hopf: Comm. Pure. Appl. Math. **3** (1950) 201.

5) G. L. Lamb, Jr.: "Bäcklund Transformations at the Turn of the Century" in *Bäcklund Transformations*, ed. R. M. Miura, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 515 (Springer, 1976).

6) A. Hasegawa: Phys. Lett. **47A** (1974) 165.
H. Hashimoto: Proc. Jpn. Acad. **50** (1974) 623.

7) R. M. Miura: "Introduction" in *Bäcklund Transformations*, ed. R. M. Miura, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 515 (Springer, 1976).

8) R. Hirota: Progr. Theor. Phys. **52** (1974) 1498.

9) 柏原正樹，神保道夫，伊達悦朗，三輪哲二：「ソリトン方程式とKac–Moodyリー環」，数学，**34** (1982) 第1号.

10) R. Hirota: Phys. Rev. Lett. **27** (1971) 1192.

11) M. Sato: RIMS Kokyuroku **439** (1981) 30.

Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro : Progr. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 210.

12) E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo and T. Miwa: *Non-linear Integrable Systems ——Classical Theory and Quantum Theory*, ed. M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, 1983) p. 39.

13) M. Jimbo and T. Miwa: Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 39.

14) 広田良吾，伊藤雅明：REDUCE 入門(サイエンス社，1989).

15) R. Hirota : "Fundamental Properties of the Binary Operators in Soliton Theory and Their Generalization" in *Dynamical Problems in Soliton Systems*, ed. S. Takeno, Springer Series in Synergetics Vol. 30, 1985.

16) K. Nozaki and N. Bekki: J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 1581.

17) K. Sawada and T. Kotera: Progr. Theor. Phys. **51** (1974) 1355.

18) R. Hirota and J. Satsuma: Progr. Theor. Phys. Suppl. **59** (1976) 64.

R. Hirota: "Direct Method of Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations" in *Bäcklund Transformations*, ed. R. M. Miura, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 515 (Springer, 1976).

R. Hirota: "Direct Methods in Soliton Theory" in *Solitons*, ed. R. K. Bullough and P. J. Caudrey, Topics in Current Physics Vol. 17 (Springer-Verlag, 1980).

19) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **33** (1972) 1456.

20) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **33** (1972) 1459.

21) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **47** (1972) 1701.

22) J. Hietarinta: J. Math. Phys. **28** (1987) 1732.

J. Hietarinta: J. Math. Phys. **28** (1987) 2094.

J. Hietarinta: J. Math. Phys. **28** (1987) 2586.

J. Hietarinta: J. Math. Phys. **29** (1987) 628.

第 2 章　行列式とパフィアン

1) 柏原正樹，神保道夫，伊達悦朗，三輪哲二：「ソリトン方程式と Kac–Moody リー環」，数学，**34** (1982) 第 1 号.

E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo and T. Miwa: *Non-linear Integrable Systems ——Classical Theory and Quantum Theory*, ed. M. Jimbo and T. Miwa (World Sci-

entific, 1983) p. 39.

M. Jimbo and T. Miwa: Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943.

2) M. Sato: RIMS Kokyuroku **439** (1981) 30.

Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro : Progr. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 210.

3) E. R. Caieniello: *Combinatorics and Renormalization in Quantum Field Theory* (Benjamin, 1973).

4) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 2285.

5) 高木貞治：代数学講義(共立出版，1965)，p. 254.

6) M. Sato and M. Noumi: *Sugaku Kokyuroku* (Sophia Univ., 1984), No. 18 (in Japanese).

7) R. Hirota: "Direct Methods in Soliton Theory" in *Solitons*, ed. R. K. Bullough and P. J. Caudrey, Topics in Current Physics Vol. 17 (Springer-Verlag, 1980).

8) M. Jimbo and T. Miwa: Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943.

9) 戸田盛和，浅野功義：行列と1次変換(岩波書店，1989).

10) 太田泰広：*Bilinear Theory of Soliton*，博士論文(東京大学工学部 1992).

11) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 412.

第3章　ソリトン方程式の構造

1) M. Sato: RIMS Kokyuroku **439** (1981) 30.

M. Sato and Y. Sato: *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science*, ed. H. Fujita, P. D. Lax and G. Strang (Kinokuniya/North-Holland, 1983), p. 259.

2) J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **46** (1979) 359.

3) N. C. Freeman and J. J. C. Nimmo: Phys. Lett. **95A** (1983) 1.

J. J. C. Nimmo and N. C. Freeman: Phys. Lett. **95A** (1983) 4.

4) B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: Sov. Phys. Doklady **15** (1970) 539.

5) J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286.

6) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. **48** (1980) 639.

7) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 2137.

8) M. Jimbo and T. Miwa: Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943.

9) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 412.
10) アブロビッツ・シーガー著，薩摩順吉，及川正行訳：ソリトンと逆散乱変換(日本評論社，1991).
11) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 2285.
12) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 2705.
13) R. Hirota and Y. Ohta: J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 798.
14) R. Hirota and J. Satsuma: Phys. Lett. **85A** (1981) 407.
15) R. Hirota, Y. Ohta and J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 1901.
16) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 3309.
17) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 4285.
18) A. N. Leznov and M. V. Saveliev: Physica **3D 1 & 2** (1981) 62.
19) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 436.
20) R. Hirota, Y. Ohta and J. Satsuma: Progr. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 59.

第4章 バックルンド変換

1) C. Rogers and W. E. Shadwick: *Bäcklund Transformations and Their Applications* (Academic Press, 1982).
2) A. C. Scott, F. Y. F. Chu and W. McLaughlin: Proc. of the IEEE **61** (1973) 1443.
3) R. Hirota: Progr. Theor. Phys. **52** (1974) 1948.
4) M. Wadati, H. Sanuki and K. Konno: Progr. Theor. Phys. **53** (1975) 418.
5) R. Hirota: "Direct Methods in Soliton Theory" in *Solitons*, ed. R. K. Bullough and P. J. Caudrey, Topics in Current Physics Vol. 17 (Springer-Verlag, 1980).
6) アブロビッツ・シーガー著，薩摩順吉，及川正行訳：ソリトンと逆散乱変換(日本評論社，1991).
7) R. M. Miura: J. Math. Phys. **9** (1968) 1202.
8) M. Jimbo and T. Miwa: Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943.
9) R. Hirota, Y. Ohta and J. Satsuma: Progr. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 59.
10) N. C. Freeman and J. J. C. Nimmo: Phys. Lett. **95A** (1983) 1.
11) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 2705.
12) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 436.

索　引

サ 行

タ 行

直接法によるソリトンの数理

1992年10月12日　第1刷発行

定価 4800円
（本体 4660円）

著　者　広（ひろ）　田（た）　良（りょう）　吾（ご）

発行者　安　江　良　介

〒101-02 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
発行所　株式会社 岩　波　書　店
電話 03-3265-4111（案内）

印刷・理想社　製本・松岳社

落丁本・乱丁本はお取替いたします　Printed in Japan
ISBN 4-00-005676-X